N° d'ordre : 29

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Jacques GROSLAMBERT

ETUDE EXPERIMENTALE DU BRUIT PROPRE DES CHAINES DE MULTIPLICATION DE FREQUENCE A VARACTORS

SOUTENUE LE 21 MARS 1969, DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. **P. MESNAGE** — Président
J. UEBERSFELD
M. OLIVIER — Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547627_0010

N° d'ordre : 29

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Jacques GROSLAMBERT

ETUDE EXPERIMENTALE DU BRUIT PROPRE DES CHAINES DE MULTIPLICATION DE FREQUENCE A VARACTORS

SOUTENUE LE , DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. **P. MESNAGE** — Président

J. UEBERSFELD, **M. OLIVIER** — Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE BESANCON

FACULTE des SCIENCES

DOYEN HONORAIRE : M. GLANGEAUD

PROFESSEURS HONORAIRES : MM. BAILLAUD, DUFFIEUX, THIRY, TRILLAT UEBERSFELD, VINCENSINI

MAITRE DE CONFERENCES HONORAIRE : M. GRANIER

DOYEN	M.	THIEBAUT	Géologie minéralogie
ASSESEUR	M.	BERNARD	Chimie physique
PROFESSEURS	MM.	TRONCHET	Botanique
		CHATELET	Mathématiques
		PERROT	Chimie générale
		PLUVINAGE	Physique théorique
		DREYFUSS	Géologie minéralogie
		MESNAGE	Chronométrie
		THEOBALD	Paléontologie et Géologie stratigraphique
		QUANTIN	Botanique
		NAHON	Mécanique générale
		CHALEAT	Mécanique appliquée
		RIPPLINGER	Physiologie animale
		BERNARD	Chimie physique

		RIGAL.....	Mathématiques
		VIENOT.....	Physique générale
		GOMOT.....	Zoologie
		THIEBAUT....	Géologie minéralogie
		ARBEY.....	Astronomie
		GALATRY.....	Physique
		THEOBALD J.G.	Physique
PROFESSEUR ASSOCIE		DEFIX.....	Mécanique appliquée
PROFESSEURS SANS CHAIRE	MM.	POTIER.....	Physique des solides
		DEVIN.....	Chimie générale
	Mlle	LEGRAND.....	Botanique
	MM.	REAL.....	Biologie animale
		VALLEE.....	Mathématiques appliquées
		GOUARNE.....	Mathématiques
		CERUTTI.....	Chimie appliquée
		PARIZET.....	Mathématiques
MAITRES DE CONFERENCES		ROBERT.....	Mathématiques
		BANTEGNIE....	Mathématiques
		MERIGOUX.....	Physique
		OLIVIER.....	Physique
CHARGES D'ENSEIGNEMENT		MASSONIE.....	Mécanique théorique
		HELLEGOUARCH.	Mathématiques
		MIELLOU.....	Mathématiques
CONSEILLER ADMINISTRATIF UNIVERSITAIRE		LAMBERT	

A mes parents

A ma femme

A Monsieur le Professeur J. UEBERSFELD

Sous-Directeur du Laboratoire de l'Horloge Atomique

Hommage de respectueuse gratitude

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de l'Horloge Atomique du Centre National de la Recherche Scientifique. Je voudrais exprimer mes remerciements à Monsieur le Directeur Général du Centre National de la Recherche Scientifique qui m'a autorisé à effectuer ce travail dans ce laboratoire.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur UEBERSFELD, Sous-Directeur du Laboratoire de l'Horloge Atomique, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, qui m'a proposé un sujet qui s'intégrait dans mon travail au laboratoire et qui m'a prodigué ses conseils tout au long de son développement.

Je voudrais remercier Monsieur le Professeur MESNAGE, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et Micromécanique, qui a bien voulu s'intéresser à mes travaux et m'a fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

Toute ma gratitude va aussi à Monsieur le Professeur OLIVIER, Maître de Conférence à la Faculté des Sciences de Besançon, qui m'a donné le goût de la métrologie et qui, par ses conseils, m'a aidé à mener à bien cette étude.

Je n'aurais garde d'oublier de mentionner l'aide efficace qui m'a été apportée par tout le personnel du Laboratoire, particulièrement Messieurs GRAND, MAGNIN MARIANNEAU, ainsi que Mlle EYMANN à qui revient le mérite d'avoir assuré avec compétence la tâche ardue de la dactylographie.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION

CHAPITRE I - DEFINITIONS FONDAMENTALES CONCERNANT LES OSCILLATEURS

- Premier moment d'une fonction aléatoire 1
- Second moment d'une fonction aléatoire 2
- Variance 4
- Autocorrélation et densité spectrale 5

CHAPITRE II -

II.1 PRINCIPE DE LA MULTIPLICATION DE FREQUENCE 9

a) Multiplication par circuit actif..... 10

b) Multiplication par circuit passif.... 11

α) Résistance non linéaire 11

β) Self non linéaire 13

γ) Capacité non linéaire 13

- La jonction p-n 14
- Le varactor 17
- Capacité par le varactor suivant le dopage 22

- Varactor idéal - Relation de MANLEY - ROWE 24

- Varactor réel 30

- Impédances présentées aux différentes fréquences harmoniques 33

- Impédance équivalente du varactor dans son boitier 37

II.2 REALISATION DES CHAINES DE MULTIPLICATION 39

1/ Description de la chaîne de multiplication de fréquence 40

2/ Exemple de calcul d'un étage multiplicateur à varactor 41

CHAPITRE III - PERFORMANCES DES CHAINES DE MULTIPLICATION

1/ MOYENS D'ETUDE

A) Etude théorique du phasemètre 46

B) Etude théorique du discriminateur 50

2/ MESURE DU BRUIT DANS LES CHAINES DE MULTIPLICATION

Description de la méthode 57

1/ Mesure du facteur de rejection du quartz 57

2/ Mesure du bruit propre des chaînes de multiplication 60

A) Mesure du bruit de sortie des chaînes de multiplication 60

B) Mesure des fluctuations de fréquence du battement de deux quartz 63

C) Mesure à très court terme des fluctuations de phase 66

3/ RESULTATS

1) Facteur de rejection 67

2) Enregistrement des fluctuations de phase 68

- Recherche de l'expression de P_{ϕ} 69

3) Enregistrement des fluctuations de fréquence 72

4) Mesure des fluctuations de fréquence par une méthode d'autocorrélation 73

- Courbe représentative de $\Delta F/F$ en fonction du temps d'intégration τ

- Utilisation en analyse spectrale des chaînes de multiplication 75

CONCLUSION

ANNEXE 1 - Influence de la tension d'alimentation I

ANNEXE 2 - Modulateur de phase III

Schémas électroniques

BIBLIOGRAPHIE

I N T R O D U C T I O N

La comparaison des étalons qui fonctionnent dans le domaine des radiofréquences, avec les étalons atomiques qui délivrent généralement des signaux situés dans le domaine des microondes, exige des dispositifs dits multiplicateurs de fréquence (ou chaînes de multiplication de fréquence) permettant de transformer un signal radio-fréquence en un signal hyperfréquence. Ces dispositifs doivent, dans toute la mesure du possible, restituer en hyperfréquence, un signal qui présente les mêmes caractéristiques (stabilité, pureté spectrale) que le signal à multiplier.

L'objet de notre mémoire a donc été de réaliser puis d'étudier les performances de divers multiplicateurs de fréquence destinés à comparer plus particulièrement la fréquence d'horloges à quartz avec celle de masers à ammoniac. La faiblesse du signal émis par le maser à ammoniac nécessite une détection superhétérodyne. C'est la raison pour laquelle il nous a paru utile que le signal multiplié (provenant de l'oscillateur à quartz) ait un niveau tel qu'il puisse jouer un rôle d'oscillateur local dans la détection superhétérodyne du maser. Notre travail a donc consisté à étudier la stabilité des multiplicateurs délivrant à leur sortie une puissance hyperfréquence suffisante (quelques milliwatts) à la fréquence de 12 000 MHz (fréquence approximativement égale à la moitié de celle du maser à ammoniac avec une détection harmonique) et capables de respecter les caractéristiques du signal à multiplier.

Notre mémoire se divise en 3 parties : dans un premier chapitre, nous rappelons les principales notions permettant de caractériser un signal radio-fréquence. Le deuxième chapitre est consacré à l'exposé des principes et aux méthodes de réalisation d'une chaîne de multiplication de fréquence. Le dernier chapitre est consacré à l'étude des performances.

CHAPITRE I

DEFINITIONS FONDAMENTALES CONCERNANT LES OSCILLATEURS

Le signal provenant d'un oscillateur peut être mis sous la forme suivante :

$$v(t) = A(t) \cos\left[\Psi(t)\right] = A(t) \cos\left[\omega_o t + \phi(t)\right] \qquad (I.1)$$

$v(t)$ représente généralement une tension ou un courant, $A(t)$ et $\phi(t)$ sont des fonctions aléatoires du temps, ω_o est une constante.

Une fonction aléatoire est une fonction du temps faisant partie d'un ensemble statistique. Les valeurs prises à un instant donné t par chacune des fonctions de l'ensemble statistique définissent une variable aléatoire.

Nous nous intéresserons essentiellement au premier et second moment de la fonction aléatoire.

1) - Le premier moment d'une fonction aléatoire est la valeur obtenue en calculant la moyenne statistique des valeurs prises à un instant donné t par l'ensemble des fonctions aléatoires.
La fonction aléatoire est dite stationnaire lorsque cette valeur moyenne est indépendante du temps t choisi.

Les fonctions aléatoires stationnaires que l'on fera intervenir seront toujours supposées ergodiques : cela signifie que l'on pourra remplacer la moyenne d'ensemble par une moyenne temporelle sur une fonction de l'ensemble. Dans ce cas, le premier moment de la fonction aléatoire sera obtenu en calculant la valeur temporelle moyenne d'une fonction de l'ensemble statistique.

2) - Le second moment est la moyenne statistique de la grandeur $f(t_1).\ f(t_2)$, t_1 et t_2 étant deux instants quelconques : c'est donc dans le cas général une fonction de t et de $t_1 - t_2$ appelée covariance de la fonction aléatoire.

Lorsqu 'on considère des fonctions stationnaires, la covariance ne dépend que de la différence $t_2 - t_1 = \tau$ et est indépendante de t. La fonction $f(\tau)$ ainsi obtenue est la fonction d'autocorrélation notée généralement $C(\tau)$.

Dans le cas où la fonction aléatoire est également ergodique, la moyenne statistique peut être remplacée par une moyenne temporelle : on prend pour un τ donné une infinité de couples de valeurs $f(t).f(t+\tau)$ appartenant à une fonction de l'ensemble et on calcule la moyenne temporelle

$$C(\tau) = \overline{f(t).f(t+\tau)} \qquad (I.2)$$

Dans l'expression (I.1), $v(t) = A(t) \cos\left[\omega_o t + \phi(t)\right]$, A(t) est l'amplitude variable du signal et ne doit pas contribuer directement aux fluctuations de fréquence. On doit noter cependant que les dispositifs non linéaires comme les multiplicateurs de fréquence peuvent convertir la modulation d'amplitude en modulation de phase et vice-versa.

On peut choisir l'origine du temps et ω_o de telle façon que $\phi(t)$ ait une moyenne temporelle nulle :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\phi(T/2) - \phi(-T/2)}{T} = 0 \qquad (I.3)$$

La fréquence angulaire instantanée $\omega(t)$ a pour expression :

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\left[\omega_o t + \phi(t)\right] = \omega_o + \dot{\phi}(t) \qquad (I.4)$$

La fréquence moyenne* du signal $v(t)$ est par définition :

$$\overline{\omega(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \omega(t)\, dt \qquad (I.5)$$

$\overline{\omega(t)}$ représente une moyenne temporelle.

On voit d'après (I.3) et (I.4) que $\phi(t)$ est la phase instantanée de l'oscillateur par rapport à un oscillateur idéal de fréquence ω_o et $\dot{\phi}(t)$ est l'écart de fréquence par rapport à ω_o. On posera :

$$\dot{\phi}(t) = \omega(t) - \omega_o = \Omega(t) \qquad (I.6)$$

Lorsqu'on définit une stabilité de fréquence, la durée de la mesure c'est-à-dire la durée d'intégration de la grandeur mesurée a une grande importance. On est donc conduit à introduire la valeur moyenne sur un temps τ des grandeurs mesurées notamment $\phi(t)$ et $\dot{\phi}(t)$:

*Dans tout ce qui suit, on parlera de la fréquence au lieu de la fréquence angulaire.

$$\dot{\overline{\phi(t,\tau)}} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \dot{\phi}(t')\, dt'$$

$$= \frac{\phi(t+\tau/2) - \phi(t-\tau/2)}{\tau} \qquad (I.7)$$

Les indices (t,τ) signifient que la moyenne a été faite sur un temps τ centré sur t.

De la même façon on définit une moyenne de la phase sur un temps fini τ :

$$\overline{\phi(t,\tau)} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \phi(t')\, dt' \qquad (I.8)$$

VARIANCE

$\phi(t)$ et $\overline{\phi(t,\tau)}$ étant des grandeurs aléatoires, de nombreuses mesures sont nécessaires pour connaître leur dispersion. On représente celle-ci par la déviation standard σ et la variance σ^2 que nous définissons par la relation :

$$\sigma^2[x] = \overline{(x - \bar{x})^2} = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 \qquad (I.9)$$

On peut donc écrire le carré de la déviation standard de la fréquence instantanée sous la forme :

$$\sigma^2 = \overline{\dot{\phi}(t)^2} - \overline{\dot{\phi}(t)}^2 \qquad (I.10)$$

On peut sans perte de généralité [1] supposer que le deuxième terme de (I.9) est égal à zéro, ce qui revient à faire une simple translation puisque c'est le carré de la fréquence moyenne temporelle. Par conséquent $\dot{\phi}(t)$ est maintenant la déviation de fréquence par rapport à la valeur moyenne et $\phi(t)$ la

déviation de phase par rapport à la phase de l'oscillateur idéal de fréquence ω_o.

En substituant (I.7) dans (I.10) on a :

$$\sigma^2_{(\tau)} = \frac{1}{\tau^2} \left[\overline{\phi(t + \tau/2)^2} - 2\,\overline{\phi(t+\tau/2).\phi(t-\tau/2)} + \overline{\phi(t-\tau/2)^2} \right] \qquad (I.11)$$

La moyenne temporelle de $\phi(t+\tau/2).\phi(t-\tau/2)$ est la fonction d'autocorrélation de la phase appelée $C_\phi(\tau)$. Par suite:

$$\sigma^2_{(\tau)} = \frac{2}{\tau^2} \left[C_\phi(0) - C_\phi(\tau) \right] \qquad (I.12)$$

AUTOCORRELATION ET DENSITE SPECTRALE

La stabilité d'un oscillateur qui peut donc s'exprimer dans le domaine temporel au moyen de la fonction d'autocorrélation peut également être représentée dans le domaine des fréquences par une densité spectrale.

La définition du signal provenant d'un oscillateur [2] nous conduit à introduire quatre spectres possibles pouvant définir les propriétés de v(t) :

1) - Le spectre total de v(t) souvent appelé spectre radiofréquence comprenant la porteuse et toutes les bandes latérales.

2) - La densité spectrale de A(t) qui pourrait être obtenue en faisant passer le signal v(t) dans un détecteur idéal de modulation d'amplitude et en mesurant le spectre à la sortie du détecteur.

3) - La densité spectrale $P_\phi(\omega)$ de la phase $\phi(t)$ s'obtient en faisant passer le signal dans un détecteur idéal de phase et en mesurant le spectre de sortie.

4) - Le spectre de $\dot{\phi}(t)$, $P_{\dot{\phi}}(\omega)$ obtenu par analyse spectrale de la sortie d'un discriminateur idéal attaqué par le signal.

Le spectre radiofréquence de v(t) est d'une grande importance dans de nombreuses applications, mais pour des oscillateurs très stables dans lesquels l'amplitude des raies latérales sont très faibles vis à vis de la porteuse, il est souvent difficile de l'obtenir directement. On procède dans ce cas, en multipliant par un facteur de l'ordre de 2 000 la fréquence du signal, ce qui a pour effet de multiplier l'indice de modulation par ce facteur et de rendre la mesure de cet indice plus facile.

Pour des oscillateurs très stables, la représentation la plus utile de la stabilité de fréquence est généralement $P_{\phi}(\Omega)$ et $P_{\phi}^{\cdot}(\Omega)$. Dans les cas les plus courants où la densité spectrale de A(t) est négligeable et où la valeur de l'indice de modulation est faible ($\ll 1$), la densité spectrale de la puissance radiofréquence est de la forme :

$$P_{RF}(\Omega) \simeq \frac{P}{2}\left[P_{\phi}(\omega_o + \Omega) + P_{\phi}(\omega_o - \Omega)\right] \qquad (I - 13)$$

où P est la puissance de la porteuse de fréquence ω_o.

Cette expression n'est donc pas valable aux fréquences voisines de la raie centrale où il y a généralement de forts indices de modulation.

La partie du spectre radiofréquence comportant les faibles indices de modulation a la même forme que la densité spectrale de la phase parce que seules les bandes latérales du premier ordre sont importantes.

La densité spectrale d'un signal aléatoire stationnaire est égale à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrelation. Nous avons défini plus haut la fonction d'autocorrelation de la phase par la relation :

$$C_{\phi}(\tau) = \overline{\phi(t - \tau/2) \cdot \phi(t + \tau/2)} \qquad (I.14)$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(t - \tau/2) \cdot \phi(t + \tau/2)\, dt$$

De la même façon $C_{\dot{\phi}}(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de la fréquence :

$$C_{\dot{\phi}}(\tau) = \overline{\dot{\phi}(t - \tau/2).\ \dot{\phi}(t + \tau/2)} \qquad (I.15)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\phi}(t - \tau/2).\ \dot{\phi}(t + \tau/2)dt$$

Ces fonctions d'autocorrélation de la phase et de la fréquence ne dépendent que de τ seul si $\phi(t)$ et $\dot{\phi}(t)$ sont stationnaires.

La densité spectrale de la phase, utilisant la représentation à deux bandes latérales symétriques est $P_{\phi}(\Omega)$:

$$P_{\phi}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\phi}(\tau)\ e^{-j\Omega\tau}\, d\tau = 2\int_{0}^{+\infty} C_{\phi}(\tau)\cos\Omega\tau\, d\tau \qquad (I.16)$$

On peut également écrire que $C_{\phi}(\tau)$ est la transformée de Fourier de $P_{\phi}(\Omega)$:

$$C_{\phi}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\phi}(\Omega)e^{j\Omega\tau}\, d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} P_{\phi}(\Omega)\cos\Omega\tau\, d\tau \qquad (I.17)$$

De la même façon $P_{\dot{\phi}}(\Omega)$ et $C_{\dot{\phi}}(\tau)$ sont reliés entre eux par des relations identiques à celles qui lient $P_{\phi}(\Omega)$ et $C_{\phi}(\tau)$.

Une relation importante permet de passer du spectre de fréquence $P_{\dot{\phi}}(\Omega)$ au spectre de phase $P_{\phi}(\Omega)$. En effet on peut développer l'expression de $\phi(t)$ en introduisant les diverses composantes de bruit de fréquence Ω_n :

$$\phi(t) = \sum_n A_n e^{j\Omega_n t} \qquad (I.18)$$

La dérivation par rapport au temps pour obtenir $\dot{\phi}(t)$ correspond à une multiplication par $j\Omega_n$ dans le domaine des fréquences donc à une multiplication par Ω_n^2 en densité spectrale.

D'une façon plus générale :

$$P_{\dot{\phi}}(\Omega) = \Omega^2 P_{\phi}(\Omega) \qquad (I.19)$$

Le carré moyen des fluctuations de phase peut être relié au spectre de phase en utilisant les relations (I.14) et (I.17) dans lesquelles on prend $\tau = 0$, nous obtenons :

$$C_{\phi}(0) = \overline{\phi^2(t)} \qquad (I.20)$$

$$C_{\phi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\phi}(\Omega) d\Omega \qquad (I.21)$$

En combinant (I.20) et (I.21)

$$\overline{\phi^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\phi}(\Omega) d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} P_{\phi}(\Omega) d\Omega \qquad (I.22)$$

De la même façon nous aurons :

$$\overline{\dot{\phi}^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} P_{\dot{\phi}}(\Omega) d\Omega \qquad (I.23)$$

Ces deux expressions (I.22) et (I.23), jointes à la relation (I.19) :

$$P_{\dot{\phi}}(\Omega) = \Omega^2 P_{\phi}(\Omega)$$

conduisent à l'équation

$$\overline{\dot{\phi}^2(t)} = f(\overline{\phi^2(t)}) \qquad (I.24)$$

Nous voyons immédiatement que cette relation (I.24) dépendra de la forme du spectre $P_{\phi}(\Omega)$.

CHAPITRE II

II.1 - PRINCIPE DE LA MULTIPLICATION DE FREQUENCE

Le principe de la multiplication de fréquence réside dans l'utilisation de circuits non linéaires. En appliquant un signal sinusoïdal $v(t) = A \exp(j\omega t + \varphi)$ à l'entrée d'un multiplicateur, on recueille à la sortie, un signal qui peut être développé en série de Fourier et qui a la forme :

$$v(t) = \sum_n A_n \exp(jn\omega t + \varphi_n) \qquad j = \sqrt{-1} \quad \text{(II.1)}$$

On pourra sélectionner l'harmonique d'ordre n en plaçant à la sortie un filtre centré sur $n\omega$, la bande passante de ce dernier doit être bien inférieure à ω si tous les harmoniques sont présents. On pourra utiliser les propriétés des montages push-pull ou push-push pour supprimer respectivement les harmoniques pairs ou impairs.

Les circuits non linéaires peuvent, soit être actifs comme un tube électronique ou un transistor polarisé en classe C ou dans une région où les caractéristiques ne sont pas linéaires, soit passifs comme une résistance, une self ou une capacité non linéaire.

a) Multiplication par circuit actif à transistor

Une polarisation du transistor (Fig. 1) au point A correspond à la classe C. Le signal de sortie a la forme représentée sur la Fig. 2 si le transistor a une fréquence de coupure suffisamment élevée et si la charge est apériodique.

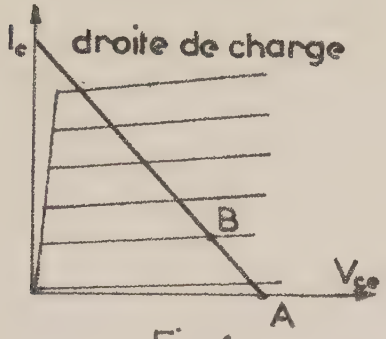


Fig 1

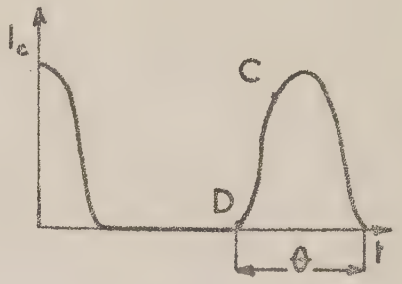


Fig 2

La décomposition en série de Fourier du signal i(t) représenté sur la Fig. 2 conduit à :

$$i(t) = \frac{I_{max}}{\pi(1 - \cos\theta/2)}\left[\left(\sin\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\omega t + \ldots + \left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\frac{\theta}{2}}{n-1} - \frac{2\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{n}\right)\cos n\omega t + \ldots\right] \qquad (II.2)$$

On remarque que cette décomposition est riche en harmoniques. L'expression (II.2) a été obtenue en idéalisant la courbe. On considère que la région C est un morceau de sinusoïde ce qui n'est généralement qu'approximatif surtout au voisinage du point D.

L'amplitude du signal à la fréquence $n\omega$ dépend de n et de "l'angle de passage" θ. La figure 3 donne l'amplitude du signal

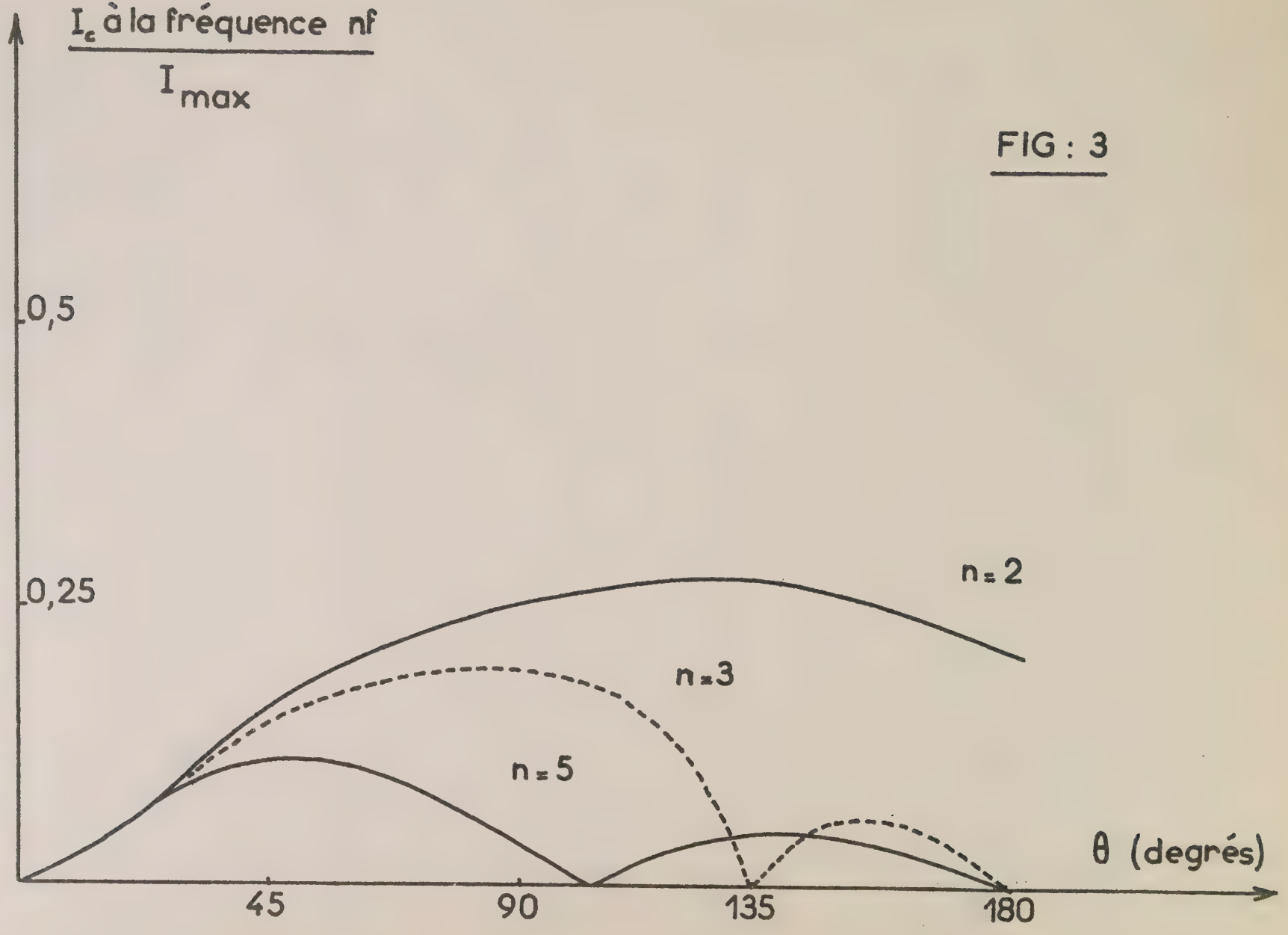

$\frac{I_c \text{ à la fréquence nf}}{I_{max}}$
0,5
0,25
n=2
n=3
n=5
θ (degrés)
45
90
135
180

FIG : 3

à la fréquence $n\omega$ pour $n = 2.3.5$ en fonction de θ. On remarque que la valeur de θ n'est pas très critique. Les valeurs optima de θ pour $n = 2.3.5$ sont respectivement 120°, 80° et 50°.

On utilisera ce mode de génération d'harmonique dans la première multiplication par 5. Un montage symétrique push-pull supprimera théoriquement les harmoniques pairs 4 et 6 situés de part et d'autre de l'harmonique désiré.

b) Multiplication par circuits passifs

α) Résistance non linéaire

$\alpha.1$- Diode idéale

Celle-ci peut être représentée sous forme analytique par :

$$\begin{aligned} I &= KV \qquad V > 0 \\ I &= 0 \qquad V < 0 \end{aligned} \tag{II.3}$$

Cette caractéristique $I = f(V)$ est la somme des deux fonctions $I_1 = \frac{KV}{2}$ et $I_2 = \frac{K|V|}{2}$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{K}{2}\left[|V| + V\right] \tag{II.4}$$

Si on applique un signal $v(t) = v\cos\omega t$ le courant de la diode a pour expression :

$$I(t) = \frac{k}{2}\left[|\cos\omega t| + \cos\omega t\right] \tag{II.5}$$

Le courant est représenté par des arcs de sinusoïde pour les valeurs $K\pi < \omega t < \frac{(2k+1)}{2}\pi$ et s'annule dans les intervalles : $\frac{(2k+1)}{2}\pi < \omega t < \frac{k+1}{2}\pi$. On en déduit la décomposition en série de Fourier de $I(t)$:

$$I(t) = \frac{kI_{max}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\cos\omega t + \frac{2}{3}\cos 2\omega t + \ldots + (-1)^{\frac{n+2}{2}}\frac{2}{n^2-1}\cos n\omega t + \ldots\right) \qquad \text{(II.6)}$$

La décomposition ne comprend que des harmoniques d'ordre pair. PAGE [3] a montré que le rendement dans une multiplication d'ordre n était toujours inférieur à $1/n^2$ lorsqu'on utilise une résistance non linéaire comme élèment multiplicateur.

α.2 - Diode classique

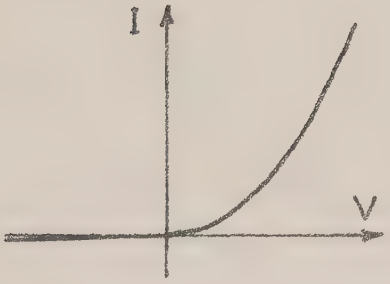


Fig 4a

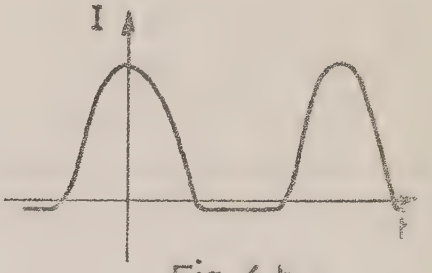


Fig 4 b

Une diode classique a une caractéristique I = f(v) plus complexe que la diode idéale (Fig. 4a). On peut dans ce cas utiliser le développement :

$$I = \sum_n K_n V^n \quad \text{pour } V > 0$$
$$I = KV \quad \text{pour } V < 0 \qquad \text{(II.7)}$$

Dans ces conditions, si la diode est alimentée par un signal de fréquence ω, un courant I(t) circulera dans la diode. Celui-ci aura la forme représentée sur la Fig. 4b. On voit que la décomposition en série de Fourier d'un tel signal peut évi-

dement être faite en approximant la caractéristique I(V) de la diode par un polynôme pour V > 0 et en remplaçant V par Vcosωt.

β) Inductance non linéaire

Considérons la self inductance présentée par une bobine ayant pour noyau un tore en acier [4] . La relation B = f(H) n'est pas linéaire. La dérivée $\frac{dB}{dH}$ et l'inductance de la bobine sont des fonctions du temps. Si une tension sinusoïdale est appliquée à une bobine comportant un tel noyau, le courant traversant la bobine contient des harmoniques. De la même façon, si un courant sinusoïdal passe à travers cette bobine, la tension à ses bornes n'est pas sinusoïdale. La fonction représentative du courant est impaire. La décomposition en série de Fourier ne donne que des termes d'ordres impairs. Une simple self peut donc être utilisée pour multiplier par un nombre impair. En ajoutant un circuit supplémentaire permettant de superposer un courant continu au courant alternatif, on déforme le signal dont l'expression n'est plus alors celle d'une fonction impaire. Cette onde contient alors des harmoniques pairs et impairs. La sélection de l'harmonique désiré se fait au moyen d'un circuit résonnant approprié (Fig. 5).

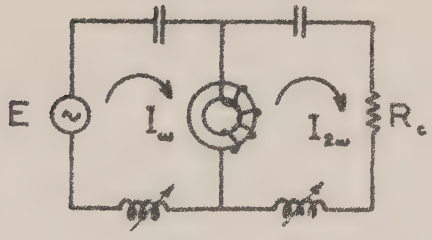


Fig 5

γ) Capacité non linéaire

Les capacités non linéaires, plus couramment appellées varactor ou varicap, ne sont rien d'autre que des diodes, qui, soumises à une polarisation inverse, ont la propriété de présenter une capacité fonction de la tension appliquée. Nous étudie-

rons d'une manière plus détaillée cet élèment multiplicateur que nous avons utilisé dans la réalisation des chaînes de multiplication. L'étude du comportement de ces varactors ne peut être comprise que dans le cadre de la théorie des diodes à jonctions : Nous reprendrons cette dernière en nous limitant à une théorie descriptive sommaire.

La jonction p. n

Une jonction p - n est obtenue par juxtaposition dans un même cristal de silicium,d'une région semi-conductrice de type n dans laquelle,par dopage, des atomes ayant cinq électrons de valence (P, As, Sb) ont remplacé des atomes de silicium dans la maille cristalline, et d'un région semi-conductrice de type p où des atomes ayant trois électrons de valence (B, Al, Ga, In) ont remplacé les atomes de silicium. Le réseau cristallin du silicium exigeant quatre liaisons électroniques homopolaires par atome, la région de type p contiendra des ions accepteurs négatifs fixes et des "trous" (charge positive) mobiles ; la région de type n comporte, des ions donneurs positifs et des électrons mobiles.

Jonction non polarisée

Les "trous" (porteurs majoritaires) de la région p diffusent dans la région n (où ils deviennent porteurs minoritaires) et se recombinent avec les porteurs majoritaires de la région n, c'est-à-dire les électrons libres. La situation est analogue pour les électrons libres de la région n qui diffusent dans la région p. Il y a recombinaison lorsqu'un électron libre rencontre un "trou" dans le réseau cristallin. Dans ce cas, l'électron libre devient électron de valence c'est-à-dire électron lié

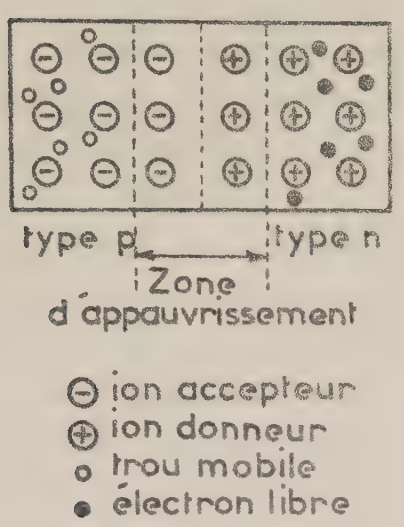


Fig 6

au réseau. Après une recombinaison deux charges libres de signe contraire ont donc disparu. On pourrait croire que tous les électrons diffusent de n vers p et tous les "trous" de p vers n. Ceci n'est pas le cas, seuls les porteurs majoritaires suffisamment proches de la jonction diffusent. Voyons pourquoi : Quand les "trous" proches de la jonction pénètrent dans la région n, ils laissent derrière eux les ions accepteurs, la région de type p n'est plus alors électriquement neutre puisqu'elle a perdu des charges positives. On peut faire le même raisonnement pour les électrons de la région n qui laissent derrière eux les ions donneurs positifs de la région n. La diffusion des porteurs majoritaires provenant de chaque région aboutit à modifier la répartition des charges. Nous voyons sur la figure 6 que seules les charges fixes restent près de la jonction. Supposons qu'un "trou" de la région p se dirige vers la jonction ; il en est repoussé par les ions donneurs positifs de la région n et est refoulé vers sa région d'origine.

En résumé la diffusion des porteurs majoritaires à travers la jonction entraîne dans cette région une accumulation de charges constituées par les charges fixes. Ces charges exercent une force électrostatique sur les porteurs majoritaires qui limite leur diffusion et dont l'intensité dépend du nombre de charges ayant traversé la jonction. On atteint finalement un état d'équilibre où la force de répulsion des ions est suffisante pour

empêcher toute diffusion supplémentaire des porteurs majoritaires. Cette zone ne comportant que très peu de porteurs libres est appelée zone d'appauvrissement.

Si nous appliquons une tension continue aux bornes de la jonction p-n, le pôle positif, relié à la partie région p et le pôle négatif à la région n, il va se produire un déplacement de charges positives (des "trous") de la région p vers la région n et inversement des électrons de la région n vers la région p. Les porteurs des deux types vont donc être entraînés vers la jonction où ils se recombinent.

Les porteurs qui arriveront à dépasser la jonction seront des "porteurs minoritaires" pour un court instant avant de se recombiner avec un porteur de charge opposée : le temps moyen avant la recombinaison s'appelle la"durée de vie".

Si maintenant les connections de la batterie sont inversées, les porteurs de chaque signe s'éloigneront de la jonction et aucun courant ne circulera. En pratique, un petit courant inverse subsiste qui est de la forme :

$$i = I_{sat} \left(1 - e^{- eV/kT_d}\right)$$

où e est la charge de l'électron

V	-	tension de la jonction
k	-	constante de Boltzman
T_d	-	température de la diode
I_{sat}	-	courant de saturation à une tension inverse élevée.

Tension d'avalanche V_a

Lorsqu'une jonction p - n est soumise à une tension inverse élevée, il existe un champ électrique extrêmement élevé. Des champs de l'ordre de $10^5 V/_{cm}$ ne sont pas rares dans des jonc-

ctions p - n. Lorsque le champ tend vers 2×10^5 V/cm les porteurs minoritaires acquièrent une vitesse tellement grande que, lors de leurs collisions avec les atomes du réseau cristallin, ils détruisent les liaisons covalentes et créent des porteurs supplémentaires qui peuvent eux-mêmes détruire d'autres liaisons. Ce phénomène est connu sous le nom de champ disruptif de ZENER. On appelle tension d'avalanche V_a, la tension de polarisation inverse produisant ce champ disruptif de ZENER. Il est à remarquer que la plupart des fabricants de varactor définissent la tension d'avalanche V_a comme celle produisant un courant inverse de 10 µA.

Potentiel de contact

La compensation de densité de charge au voisinage de la jonction par les charges mobiles n'est pas intégralement réalisée. Par suite, même en l'absence de tension appliquée, une différence de potentiel existe aux bornes de la jonction, on l'appelle différence de potentiel de contact Ø.

Nous verrons par la suite que les varactors peuvent être soumis à des potentiels allant de Ø à $- V_a$. Ø pour la plupart des varactors est de l'ordre de 0,5 Volt.

Le varactor

Le schéma équivalent d'un varactor est celui de la Fig. 7. Deux élèments le constituent :

- une résistance série parasite R_S
- une capacité non linéaire C

Nous allons établir la relation C = f(V) caractérisant la capacité non linéaire des jonctions p-n :

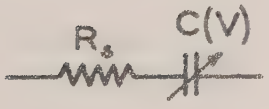


Fig 7

Capacité de la jonction

Supposons une distribution de charges fixes N(x), où N(x) représente la densité de charge des ions accepteurs pour $x < 0$ et celle des ions donneurs pour $x > 0$.

Pour calculer la distribution des électrons et des trous, nous pouvons écrire que les densités de courant de trous et d'électrons sont :

$$\vec{J}_n = en\mu_n \vec{E} + eD_n \text{ grad } n \qquad \text{(II.9)}$$

$$\vec{J}_p = ep\mu_p \vec{E} - eD_p \text{ grad } p \qquad \text{(II.10)}$$

Dans ces relations, $\vec{J}_n$ est le courant dû aux électrons. μ_n est la mobilité des électrons, D_n est la constante de diffusion des électrons, $\vec{J}_p$, μ_p et D_p étant respectivement le courant, la mobilité et la constante de diffusion des trous. Le premier terme de (II.9) et (II.10) est le courant dû à l'action du champ électrique, le deuxième est le courant de diffusion.

On considère souvent que les densités de courants $\vec{J}_n$ et $\vec{J}_p$ sont très petites devant chacun des termes du second membre des relations précédentes.

De cette façon on peut déduire le champ électrique $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{D_n}{\mu_n} \frac{\text{grad } n}{n} \qquad \vec{E} = \frac{D_p}{\mu_p} \frac{\text{grad } p}{p} \qquad \text{(II.11)}$$

En faisant intervenir la relation d'Einstein :

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = \frac{kT_d}{e}$$

T_d température de la jonction

k constante de Boltzmann

$$\vec{E} = -\frac{kT_d}{e}\frac{\text{grad } n}{n} = \frac{kT_d}{e}\frac{\text{grad } p}{p} \qquad \text{(II.12)}$$

D'autre part

$$\text{div } E = \frac{e}{\varepsilon}\,(N(x) + p(x) - n(x)) \qquad \text{(II.13)}$$

En principe on peut obtenir p(x) et n(x) en résolvant simultanément le système différentiel formé par les relations (II.12) et (II.13).

Soit q la charge totale de chaque côté de la jonction :

$$q = eA\int_0^{\infty}(N + p - n)dx = -eA\int_{-\infty}^{0}(N + p - n)dx \qquad \text{(II.14)}$$

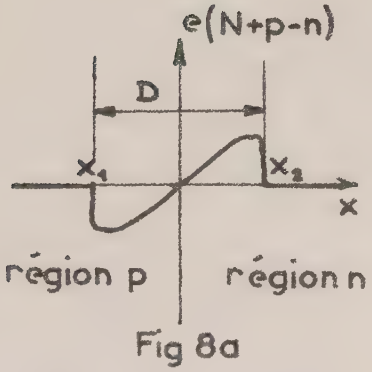


Fig 8a

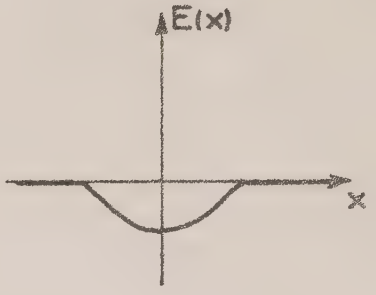


Fig 8b

Les figures 8a et 8b représentent respectivement la densité de charge totale et le champ électrique en fonction de x. On distingue sur la Fig. 8a 3 régions distinctes, la zone d'appauvrissement (D) où n et p sont négligeables et des régions neutres où la valeur de (N + p - n) est pratiquement nulle. Entre ces zones

il existe des régions de faible épaisseur (aux points x_1 et x_2) dont l'ordre de grandeur L_s est défini par Shockley :

$$L_s = \sqrt{\frac{k T_d \varepsilon}{e^2 N}} \qquad (II.15)$$

où N est la densité des charges fixes à cet endroit.

Le calcul de la capacité en fonction de la tension appliquée est conduit en prenant tout d'abord une valeur donnée de cette tension de polarisation, ce qui fixe la position des limites de la zone d'appauvrissement (x_1 et x_2). Dans ces conditions en supposant que l'on enlève une charge négative δq au point x_1 et que l'on ajoute une charge δq en x_2, on obtient une variation de tension δv et la capacité pour cette polarisation est par définition : $C = \frac{\delta q}{\delta v}$.

Le processus de calcul de δv est un processus linéaire faisant intervenir le calcul de δE par la relation (II.13) [5] .

C'est le processus utilisé pour calculer la capacité d'un condensateur plan caractérisé par une aire A et une distance entre armatures égale à $(x_2 - x_1)$:

$$C = \frac{\varepsilon A}{x_2 - x_1} \qquad (II.16)$$

Considèrons un varactor polarisé en inverse par une tension d'amplitude supérieure à quelques dixièmes de volt ; L_s est alors négligeable devant l'épaisseur de la zone d'appauvrissement. Cette approximation, faite dans la plupart des analyses traitant des jonctions P - n [6], permet de simplifier le problème. Dans ce cas la relation (II.16) permet d'écrire :

$$C = \frac{\varepsilon A}{D} \qquad (II.17)$$

La densité de charge est nulle à l'extérieur de la zone d'appauvrissement et égale à eN(x) à l'intérieur. La charge q est alors donnée par deux relations tirées de (II.14) :

$$q = -eA\int_{x_1}^{0} N(x)dx = eA\int_{0}^{x_2} N(x)dx \qquad \text{(II.18)}$$

De plus $D = x_2 - x_1$

Les équations (II.18) relient D, x_1, x_2 si N(x) est connu. Par commodité nous définirons la densité de charge réduite N_r fonction positive de D définie par la relation :

$$N_r(D) = \frac{N(x_1) \cdot N(x_2)}{N(x_1) - N(x_2)} = \frac{|N(x_1)| \cdot |N(x_2)|}{|N(x_1)| + |N(x_2)|} \qquad \text{(II.19)}$$

où $N(x_I)$ et $N(x_2)$ sont les densités de charge aux bords de la zone d'appauvrissement.

$$q = eA\int_{0}^{D} N_r(D)dD \qquad \text{(II.20)}$$

Une faible variation de la charge q provoquera une variation de l'épaisseur de la zone d'appauvrissement.

$$\delta q = eAN_r(D).\delta D \qquad \text{(II.21)}$$

En se servant des relations $\delta q = C\delta V$

$$\delta C = \frac{-\varepsilon A}{D^2}\,\delta D \quad \text{déduite de (II.17)}$$

On tire

$$N_r(D) = \frac{-C^3 \delta V}{e \varepsilon A^2 \delta C} \qquad (II.22)$$

Capacité présentée par le varactor suivant le dopage

a) Jonction abrupte

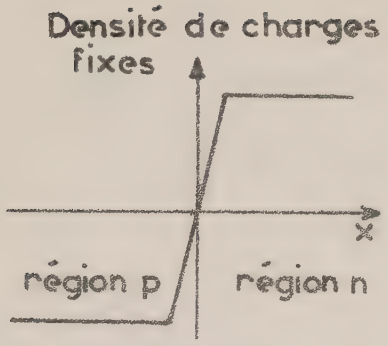


Fig 9

Le dopage d'une jonction abrupte est représenté sur la Fig. 9, celui-ci est égal à une constante N_A pour $x<0$, à N_B pour $x>0$. Dans ces conditions, $N_r(D)$ est constant.

$$N_r(D) = N_r = K$$

En intégrant la relation (II.22) il vient :

$$C^2 = \frac{N_r e \varepsilon A^2}{2} (V + \phi)^{-1} \qquad (II.23)$$

où ϕ est le potentiel de contact.

En appelant C_{min} la valeur de C à la tension d'avalanche V_a :

$$\frac{N_r e \varepsilon A^2}{2} = C_{min}^2 (V_a + \phi)$$

$$C = C_{min} \left(\frac{V_a + \phi}{V + \phi}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (II.24)$$

b) Jonction lente

Un varactor à jonction lente présente un dopage N(x) qui est proportionnel à x (Fig. 10) :

$$N(x) = ax \qquad \text{(II.25)}$$

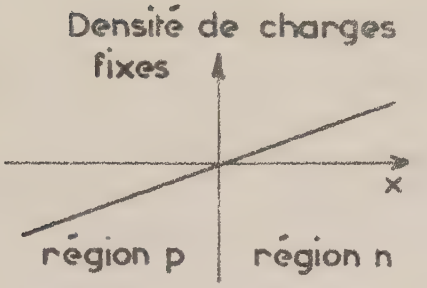


Fig 10

Dans ces conditions la relation (II.18) donne

$$x_2 = -x_1 = \frac{D}{2}$$

De cette façon

$$N_r(D) = \frac{aD}{4}$$

$$\frac{aD}{4} = \frac{-C^3 \delta V}{e A^2 \delta C} \quad \text{avec } D = \frac{\varepsilon A}{C} \qquad \text{(II.26)}$$

L'expression de C = f(v) s'obtiendra de la même façon que précédemment

$$C = C_{min}\left(\frac{V_a + \phi}{V + \phi}\right)^{1/3} \qquad \text{(II.27)}$$

Ces deux cas constituent des cas limites pouvant servir à classer d'une façon approximative en deux catégories les varactors réels. En général on posera donc

$$C = C_{min}\left(\frac{V_a + \phi}{V + \phi}\right)^{\alpha} \qquad \text{(II.28)}$$

avec $\frac{1}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$

Résistance série

La capacité non linéaire est la caractéristique essentielle d'un varactor. Cependant il ne faut pas oublier la résistance série parasite R_s dont l'expression est la suivante :

$$R_s = \frac{1}{A}\int_{x_{e_1}}^{x_1} \rho(x)dx + \frac{1}{A}\int_{x_2}^{x_{e_2}} \rho(x)dx \qquad (II.29)$$

Dans cette expression x_1 et x_2 représentent toujours les bords de la zone d'appauvrissement, x_{e_1} et x_{e_2} sont les abcisses des extrémités de la jonction p.n, $\rho(x)$ est la résistivité du semiconducteur et A la section du barreau.

On définit la fréquence de coupure ω_c qui caractérise un varactor comme étant

$$\omega_c = \frac{1}{R_s C_{min}} \qquad (II.30)$$

Dans cette expression C_{min} est la valeur de la capacité à la tension d'avalanche.

Varactor idéal - Relation de Manley Rowe

Manley et Rowe ont étudié les relations énergétiques dans les capacités non linéaires sans pertes dans lesquelles $v = f(q)$ est une fonction arbitraire de la charge :

Considérons une capacité non linéaire [7] excitées par deux signaux de fréquence f_o et f_1 et de puissance respective W_o et W_1, la non linéarité entraîne l'apparition de signaux aux fréquences $f_{mn} = (mf_o + nf_1)$ où m et n sont des entiers positifs négatifs ou nuls.

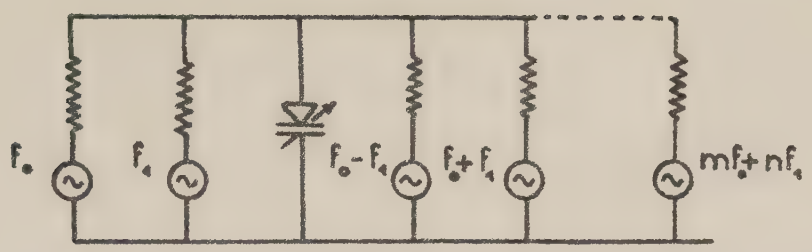


Fig 11

La charge q traversant la capacité non linéaire peut être exprimée en une double série de Fourier :

$$q = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q_{mn}\, e^{j(mx + ny)} \qquad \text{(II.31)}$$

$$x = \omega_1 t \qquad \omega_1 = 2\pi f_1$$
$$y = \omega_o t \qquad \omega_o = 2\pi f_o \qquad \text{(II.32)}$$

Puisque q est réel

$$Q_{m.n} = Q_{-\,m,\,-\,n}^{\ *}$$

$$Q_{-\,m,\,-\,n} = Q_{m.n}^{\ *} \qquad {}^{*}\text{complexe conjugué} \qquad \text{(II.33)}$$

x et y sont indépendants puisque provenant de deux générateurs différents.

Si l'on prend la dérivée totale par rapport au temps :

$$i = \frac{dq}{dt} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{m,n} e^{j(mx + ny)} \qquad (II.34)$$

$$I_{m,n} = j(m\omega_1 + n\omega_o) Q_{m,n} \qquad (II.35)$$

$$I_{m,n} = I_{-m,-n}^{*} \qquad I_{-m,-n} = I_{m.n}^{*} \qquad (II.36)$$

La tension v est une fonction de la charge q, mais comme celle-ci est fonction de x et de y on obtient :

$$v = f(q) = f(q(x,y)) = F(x,y) \qquad (II/37)$$

v peut donc être développé en double série de Fourier :

$$v = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_{m,n} e^{j(mx + ny)} \qquad (II.38)$$

$$V_{m,n} = V_{-m,-n}^{*} \qquad V_{-m,-n} = V_{m,n}^{*} \qquad (II.39)$$

Les coefficients $V_{m,n}$ sont donnés par :

$$V_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dy \int_0^{2\pi} dx\, F(x.y)\, e^{-j(mx + ny)} \qquad (II.40)$$

Multiplions des deux côtés par $jmQ_{m,n}^{*}$ et sommons de $-\infty$ à $+\infty$ sur m et n. Alors en changeant l'ordre d'intégration et de sommation sur le 2e membre :

$$\sum_m \sum_n jm\, Q_{m,n}^{*} V_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dy \int_0^{2\pi} dx\, F(x.y) \sum_m \sum_n jmQ_{m,n}^{*} e^{-j(mx + ny)} \qquad (II.41)$$

en prenant l'expression de q et en différentiant par rapport à x :

$$\frac{\delta q}{\delta x} = \sum_m \sum_n jmQ_{m,n} e^{j(mx + ny)} \qquad \text{(II.42)}$$

$$\frac{\delta q}{\delta x} = -\sum_m \sum_n jmQ_{m,n}^{*} e^{-j(mx + ny)} \qquad \text{(II.43)}$$

Cette expression se trouve être juste la double sommation sous l'intégrale de (II.41).

D'autre part dans le premier membre de la relation (II.41) remplaçons $Q_{m,n}^{*}$ par sa valeur tirée de (II.35) en prenant le complexe conjugué.

$$Q_{m,n}^{*} = \frac{I_{m,n}^{*}}{-j(m\omega_1 + n\omega_o)} = \frac{I_{m,n}^{*}}{-2\pi j(mf_1 + nf_o)}$$

En remplaçant dans (II.41)

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{mV_{m,n} I_{m,n}^{*}}{mf_1 + nf_o} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy \int_0^{2\pi} dx \frac{\partial q}{\partial x} F(x, y) \qquad \text{(II.44)}$$

Comme x est constant dans la deuxième intégrale $dx \frac{\delta q}{\delta x} = dq$

D'après (II.37)

$$\sum_m \sum_n \frac{mV_{m,n} I_{m,n}^{*}}{mf_1 + nf_o} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy \int_{q(0,y)}^{q(2\pi,y)} f(q)\, dq \qquad \text{(II.45)}$$

De la même façon puisque x et y sont indépendants nous pouvons obtenir :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n V_{m,n} I_{m,n}^{*}}{m f_1 + n f_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \int_{q(x,0)}^{q(x,2\pi)} f(q)\, dq \qquad (II.46)$$

Ces deux dernières équations II.45 et II.46 relient les quantités $V_{m,n} I_{m,n}^{*}$ aux puissances moyennes associées aux fréquences : $m\omega_1 + n\omega_o$

$$S_{m,n} = W_{m,n} + jX_{m,n} = 2\, V_{m,n} I_{m,n}^{*} \qquad (II.47)$$

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= S_{-m,-n}^{*} \\ S_{-m,-n} &= S_{m,n}^{*} \end{aligned} \qquad (II.48)$$

On a

$$W_{m,n} = V_{m,n} I_{m,n}^{*} + V_{m,n}^{*} I_{m,n} = W_{-m,-n} \qquad (II.49)$$

$$X_{m,n} = j(V_{m,n}^{*} I_{m,n} - V_{m,n} I_{m,n}^{*}) = -X_{-m,-n} \qquad (II.50)$$

où $S_{m,n}$ $W_{m,n}$ et $X_{m,n}$ sont respectivement le vecteur puissance la puissance réelle et la puissance réactive traversant la capacité non linéaire.

En examinant (II.45), (II.46) on voit que seules apparaîtront les puissances réelles dans le cas de la capacité non linéaire.

En combinant (II.45 - 46 - 49)

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{m W_{m,n}}{m f_1 + n f_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy \int_{q(0,y)}^{q(2\pi,y)} f(q)\, dq \qquad (II.51)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\, W_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \int_{q(x,0)}^{q(x,2\pi)} f(q)\, dq \qquad \text{(II.52)}$$

où $W_{m,n}$ est la puissance moyenne traversant la capacité non linéaire aux fréquences $\pm \left| mf_1 + nf_0 \right|$.

f(q) est périodique en x et y et reprend sa valeur initiale à la fin de l'intégration.

En conséquence les deux deuxièmes membres sont nuls et on a :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{m\, W_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = 0 \qquad \text{(II.53)}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\, W_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = 0 \qquad \text{(II.54)}$$

En multipliant respectivement par f_1 et f_0 ces deux expressions et en faisant la somme on trouve :

$$\sum_{m,n} P_{m\,n} = 0 \qquad \text{(II.55)}$$

Dans cette relation la puissance $P_{m\,n}$ est positive quand elle est fournie au varactor et négative quand elle est cédée par celui-ci. Ceci implique que ces deux relations de MANLEY et ROWE ne sont valables que dans le cas où la capacité non linéaire est sans perte.

Avec les multiplicateurs de fréquence où la capacité non linéaire n'est excitée que par une seule fréquence, la relation précédente est simplifiée : On impose m = 0 ce qui donne, si P_n définit la puissance à la fréquence $n\omega_o$ d'entrée :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 0 \qquad \text{(II.56)}$$

Nous avons vu que les multiplicateurs à résistance non linéaire ont un rendement qui ne peut excéder n^{-2}, n étant le rapport entre la fréquence de sortie et la fréquence d'entrée [3] . Par contre, les capacités non linéaires parfaites, d'après les relations de MANLEY - ROWE, ont un rendement de 100 %. Cependant la résistance série non négligeable présentée par la diode ainsi que les pertes dans les circuits diminuent l'efficacité de la multiplication et ceci d'autant plus que la fréquence d'entrée se rapproche de la fréquence de coupure du varactor.

Varactor réel

Dans un multiplicateur à varactor, le paramètre fondamental est l'inverse de la capacité, l'élastance $S = \frac{1}{C}$. S est une fonction non linéaire de la tension V aux bornes du varactor. L'équation (II.57) relie la tension instantanée v(t) aux grandeurs variables i(t) et S(t):

$$v(t) = R_s\, i(t) + \int S(t)\, i(t)\, dt \qquad \text{(II.57)}$$

R_s est la résistance ohmique série de la diode
S l'élastance

Lorsque v(t) est une fonction périodique du temps de fréquence angulaire ω_o, S est également une fonction périodique du temps que l'on peut développer en série de Fourier :

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_k\, e^{jk\omega_o t} \qquad \text{(II.58)}$$

Autrement dit, dans le cas le plus général, nous aurons les relations :

$$v(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} V_k\, e^{jk\omega_o t} \qquad \text{(II.59)}$$

$$i(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} I_k e^{jk\omega_o t} \qquad \text{(II.60)}$$

où v(t), i(t) et S(t) sont réels

$$V_{-k} = V_k^* \qquad I_{-k} = I_k^* \quad \text{et} \quad S_{-k} = S_k^* \qquad \text{(II.61)}$$

* complexe conjugué

Calculons les coefficients de Fourier V_k en fonction des coefficients de Fourier du courant et de l'élastance.

D'après (II.57) on peut écrire :

$$v(t) = R_s \sum_{r=-\infty}^{+\infty} I_r e^{jr\omega_o t} + \int \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_m e^{jm\omega_o t} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} I_l e^{jl\omega_o t}\, dt \qquad \text{(II.62)}$$

Après intégration et en utilisant la relation (II.59)

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V_k e^{jk\omega_o t} = R_s \sum_{r=-\infty}^{+\infty} I_r e^{jr\omega_o t} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S_m I_l \frac{1}{j(l+m)\omega_o} e^{j(l+m)\omega_o t} \qquad \text{(II.63)}$$

Chaque coefficient de Fourier V_k de la tension peut être exprimé en fonction des coefficients de Fourier de l'élastance et du courant :

$$V_k = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)\, e^{-jk\omega_o t}\, dt$$

$$V_k = \frac{1}{T} R_s \int_0^T \sum_{r=-\infty}^{+\infty} I_r e^{j(r-k)\omega_o t}\, dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S_m I_l \frac{1}{j(l+m)\omega_o} e^{j(l+m-k)\omega_o t}\, dt \qquad \text{(II.64)}$$

Ces intégrales sont différentes de zéro seulement si $r - k = 0$

$1 + n - k = 0$

Le coefficient de Fourier V_k devient après intégration :

$$V_k = R_s I_k + \frac{1}{jk\omega_o} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S_{k-l} I_l \qquad \text{(II.65)}$$

Cette relation permet de montrer que la tension aux bornes des varactors à la fréquence $k\omega_o$ dépend de l'intensité des courants de fréquence $l\omega_o$ parcourant le varactor.

Dans le cas du varactor à jonction abrupte qui est un système quadratique (II.23), on n'obtient que des composantes aux fréquences ω_o et $2\omega_o$ superposées à une tension continue qui peut servir à auto polariser le varactor.

Lorsqu'on désire la génération d'une tension de fréquence $l\omega_o$, il est donc nécessaire de favoriser le passage des courants aux fréquences $(l-1)\omega_o$ $(l-2)\omega_o$ ... $3\omega_o$, $2\omega_o$ par l'adjonction de circuits résonnants sur ces fréquences intermédiaires (circuits "idlers"), la non linéarité du circuit introduit des mélanges qui diminuent le nombre des circuits "idlers" nécessaires.

Un varactor ne pourra donc fonctionner en multiplicateur d'ordre supérieur à 2 que s'il existe des courants "idlers" à une ou plusieurs fréquences autre que celles d'entrée et de sortie.

Appliquons la théorie précédente à un cas particulier à titre d'exemple, celui du tripleur. Le varactor attaqué par une source de fréquence ω_o génère la fréquence $2\omega_o$ en l'absence de tout circuit extérieur autre que celui de l'entrée (Fig. 12a).

Si l'on prend deux sources de fréquences respectives ω_1 et ω_2 on obtiendra des tensions de fréquence ω_1, $2\omega_1$, ω_2, $2\omega_2$ ainsi que $\omega_1 - \omega_2$ et $\omega_1 + \omega_2$ (Fig. 12b). En reprenant le premier cas (Fig. 12a) si l'on ajoute un circuit résonnant série à la fréquence

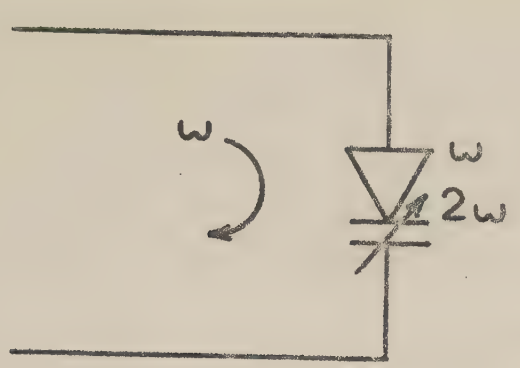


FIG 12 a

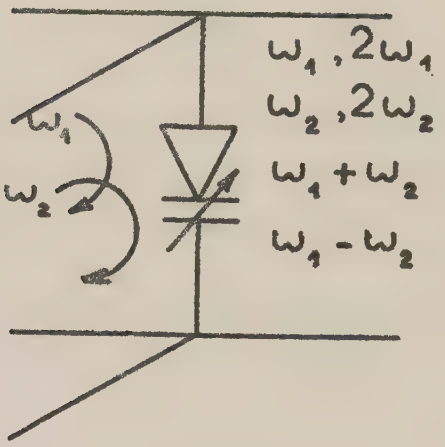


FIG 12 b

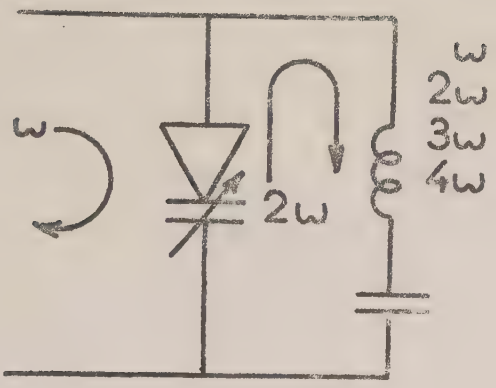


FIG 12 c

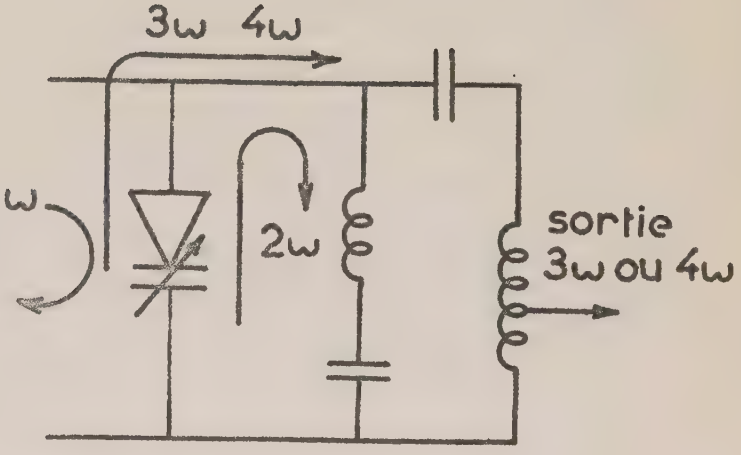


FIG 12 d

Fonctionnement d'un varactor
en multiplicateur

$2\omega_o$ avec le varactor, (Fig. 12c) ce qui permet la circulation d'un courant à cette fréquence, nous sommes ramenés au cas précédent (Fig. 12b). On obtient notamment des tensions de fréquence $3\omega_o$ (par $\omega_o + 2\omega_o$) et $4\omega_o$ (par $2 \times 2\omega_o$). Les signaux peuvent être recueillis au moyen d'un circuit résonnant approprié (Fig. 12d).

Impédances présentées par un varactor aux différentes fréquences harmoniques

Nous avons vu (II.23) que dans le cas du varactor à jonction abrupte la charge q est inversement proportionnelle à la capacité C présentée par la jonction : elle est donc proportionnelle à l'élastance S.

L'effet de capacité de la jonction ne se produit que dans une zone de polarisation inverse limitée par la tension d'avalanche V_a et le potentiel de contact $\phi\ (V_{min})$. Supposons que le varactor reçoive un signal V(t) de fréquence ω_o délivré par un générateur, la valeur du signal V(t) devra varier entre V_a et V_{min}. Nous appellerons Q_a, S_a et Q_{min} S_{min} la charge et l'élastance du varactor lorsque celui-ci est respectivement polarisé à V_a et à V_{min}.

La relation caractéristique entre la charge Q et l'élastance S dans un varactor à jonction abrupte a la forme suivante :

$$\frac{S - S_{min}}{S_a - S_{min}} = \frac{Q - Q_{min}}{Q_a - Q_{min}} \qquad \text{(II.66)}$$

La tension aux bornes du varactor pourra varier entre la tension d'avalanche V_a et la tension minimum V_{min}.

Cette variation de tension s'obtiendra en intégrant l'élastance :

$$V_a - V_{min} = \int_{Q_{min}}^{Q_a} S dQ \qquad (II.67)$$

En extrayant S de (II.66) et en le remplaçant par sa valeur dans (II.67) on obtient :

$$V_a - V_{min} = \frac{1}{2} (Q_a - Q_{min}) (S_a + S_{min}) \qquad (II.68)$$

On en tire

$$Q_a - Q_{min} = \frac{2(V_a - V_{min})}{S_a + S_{min}} \qquad (II.69)$$

D'après (II.66) et (II.69) Q a pour valeur :

$$Q = \frac{2(V_a - V_{min}) (S - S_{min})}{(S_a + S_{min}) (S_a - S_{min})} + Q_{min} \qquad (II.70)$$

où Q et S sont des fonctions du temps.

Calculons le courant i(t) :

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \qquad (II.71)$$

$$i(t) = \frac{2 (V_a - V_{min})}{S_a + S_{min}} \frac{d}{dt} \left(\frac{S(t)}{S_a - S_{min}} \right) \qquad (II.72)$$

Or :

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k \, e^{jk\omega_o t}$$

où les S_k sont les coefficients de la décomposition en série de Fourier de l'élastance.

Pour plus de commodités nous appellerons

$$M_k = \frac{S_k}{S_a - S_{min}}$$

Le courant circulant à la fréquence $k\omega_o$ aura pour expression :

$$I_k = \frac{2(V_a - V_{min})}{S_a + S_{min}} \, jk\omega_o M_k \qquad \text{(II.73)}$$

Nous allons maintenant déterminer la tension aux bornes du varactor en fonction des coefficients du développement en série de Fourier de l'élastance.

$$\frac{C}{C_{min}} = \left[\frac{V_a + \phi}{v + \phi} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II.24)}$$

On en déduit :

$$\left(\frac{S}{S_a} \right)^2 = \frac{v + \phi}{V_a + \phi} \qquad \text{(II.74)}$$

La tension aux bornes en fonction de V_{min}, S_{min}, S_a et V_a après un calcul simple prend la forme :

$$v - V_{min} = \frac{S^2 - S_{min}^2}{S_a^2 - S_{min}^2} (V_a - V_{min}) \qquad (II.75)$$

Cette expression ne tient compte que de la partie réactive du varactor ; il est nécessaire d'introduire la résistance parasite série R_s :

$$v - V_{min} = \frac{S^2 - S_{min}^2}{S_a^2 - S_{min}^2} (V_a - V_{min}) + R_s i \qquad (II.76)$$

Dans cette expression v, S, i sont des fonctions du temps.

Si nous décomposons v en série de Fourier, l'expression de la tension V_k à la fréquence $k\omega_o$ est donnée par :

$$V_k = R_s I_k + \frac{S_a - S_{min}}{S_a + S_{min}} (V_a - V_{min}) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} M_r M_{k-r} \qquad (II.77)$$

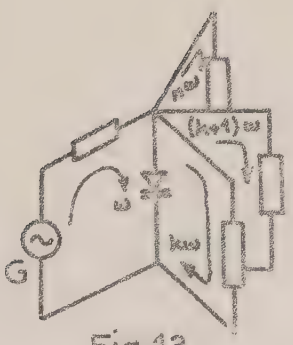


Fig 13

Disposons maintenant des circuits comme indiqués sur la Fig. 13 tels que chaque maille soit parcourue par un seul courant I_k à la fréquence $k\omega_o$, (ceci peut être obtenu au moyen de circuits résonnants série). Soit Z_k l'impédance présentée par le varactor à la fréquence $k\omega_o$:

$$Z_k = \frac{V_k}{I_k} = R_k + jX_k \qquad (II.78)$$

$$Z_k = R_s + \frac{S_a - S_{min}}{2\ jk\omega_o\ M_k} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} M_r M_{k-r} \qquad (II.79)$$

$$R_k = R_e \left(R_s + \frac{S_a - S_{min}}{2\ jk\omega_o\ M_k} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} M_r M_{k-r}\right) \qquad (II.80)$$

$$X_k = I_m \left(R_s + \frac{S_a - S_{min}}{2\ jk\omega_o M_k} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} M_r M_{k-r}\right)$$

Les valeurs de M_k ont été tabulées[5] pour des ordres de multiplication n avec $2 \leqslant n \leqslant 8$, permettant ainsi de calculer l'impédance équivalente du varactor aux différentes fréquences harmoniques.

Impédance équivalente du varactor dans son boitier

L'introduction du varactor dans un boitier (Fig. 14) fait apparaître des impédances parasites dont il est nécessaire de tenir compte : ce sont la capacité C_b du boitier et la self L présentée par les fils de connexion internes. On introduit l'impédance équivalente Z_{eq} du varactor à la fréquence ω :

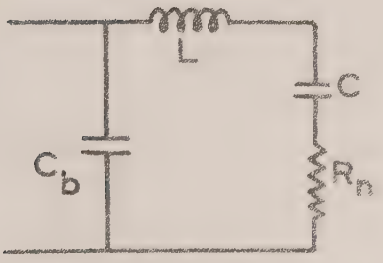


Fig 14

$$Z_{eq} = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b}$$

avec

$$Z_a = R_k + j\left[L\omega - \frac{1}{C\omega}\right] \qquad Z_b = \frac{1}{jC_b\omega}$$

$$Z_{eq} = \frac{-j\left[R_k + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})\right]}{C_b\omega\left[R_k + j(L\omega - \frac{1}{C\omega} - \frac{1}{C_b\omega})\right]}$$

En posant $A = R_k^2 + \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} - \frac{1}{C_b\omega}\right]^2$

$$Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$$

$$R_{eq} = \frac{R_k}{C_b^2\omega^2 \times A} \qquad X_{eq} = -\frac{R^2 + \left[L\omega - \frac{1}{C\omega}\right]\left[L\omega - \frac{1}{C\omega} - \frac{1}{C_b\omega}\right]}{C_b\omega \times A}$$

(II.81)

II.2 REALISATION DES CHAINES DE MULTIPLICATION

Notre travail était de réaliser et d'étudier les performances des chaînes de multiplication permettant d'obtenir un signal en bande X à partir de la fréquence de quartz métrologiques oscillant à 5 MHz dont nous disposons au Laboratoire de l'Horloge Atomique. Ces chaînes de multiplication devaient donner la possibilité de détecter un maser à ammoniac oscillant à 23870,129 MHz.

On a réalisé un ensemble conduisant par multiplication directe de 5 à 12 000 MHz. La fréquence de sortie a été choisie de façon à satisfaire à deux impératifs : d'une part ne faire intervenir que des facteurs de multiplication peu élevés et d'autre part il était nécessaire d'obtenir avec le maser, après détection harmonique d'ordre 2, un signal de battement dont la fréquence ne soit pas trop grande. Le choix d'une fréquence de sortie de 12 000 MHz conduit à une fréquence de battement de 129,8 MHz. Les facteurs de multiplication qui interviennent dans la chaîne peuvent être choisis égaux ou inférieurs à cinq.

Cet ensemble de multiplication comprend une partie classique de multiplication à transistors avec des étages amplificateurs qui permettent d'obtenir une puissance VHF suffisante pour attaquer la chaîne de multiplicateurs à varactors de 125 MHz à 12 000 MHz.

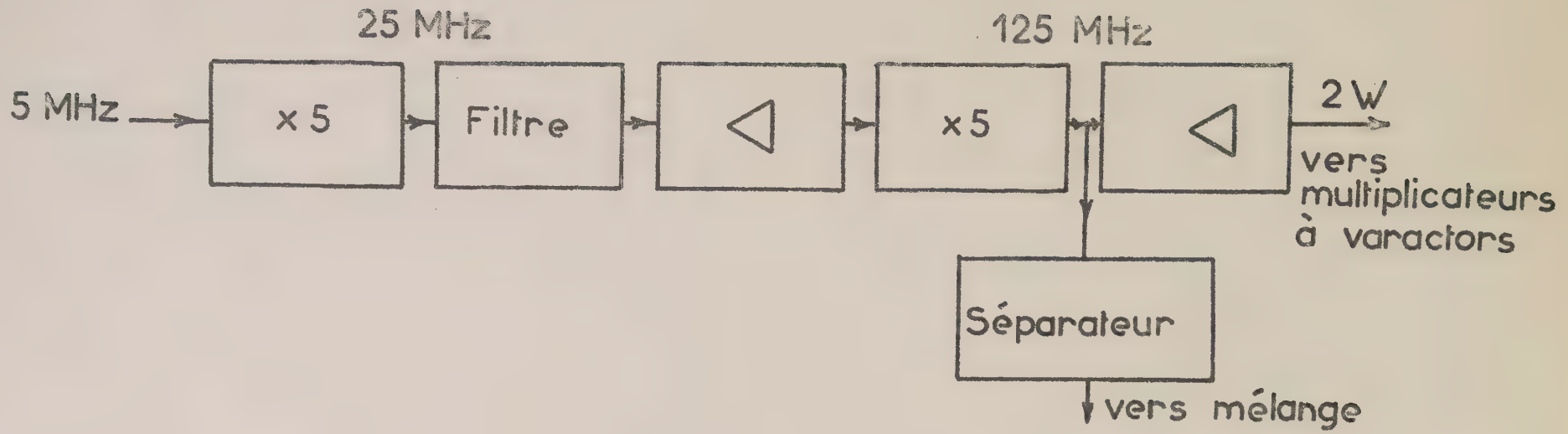


FIG 15 Multiplicateurs haute fréquence

FIG 16 Multiplicateurs VHF - Bande X

1) Description de la chaîne de multiplication de fréquence

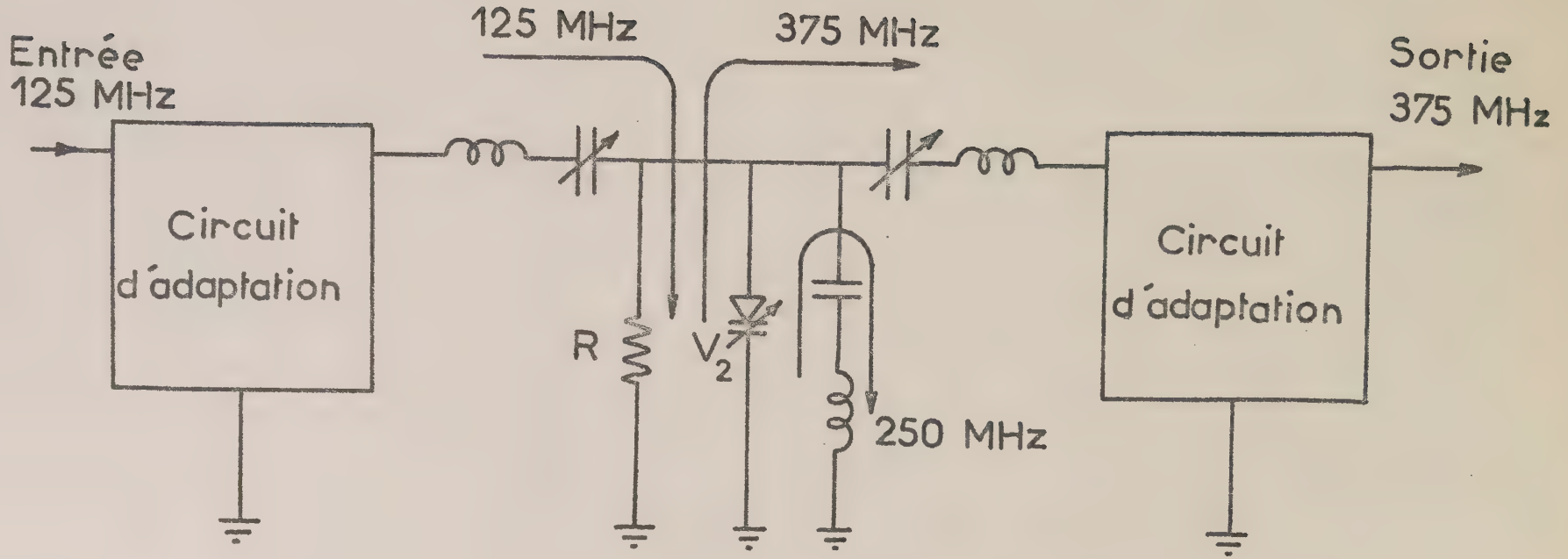
a/ Multiplicateurs haute fréquence

La première partie de la chaîne de multiplication (Fig. 15) comporte un étage séparateur à 5 MHz suivi d'un multiplicateur par 5 à transistor du type push-pull. Un filtre à bande étroite permet de supprimer la modulation résiduelle à 5 MHz que nous retrouverions après multiplication sous forme de bandes latérales sur la fréquence de sortie de la chaîne. Le signal à 25 MHz est amplifié à un niveau de 200 mW ce qui permet d'attaquer un quintupleur à varactor qui comprend deux idlers à 50 MHz et à 75 MHz. On obtient 40 mW à 125 MHz.

L'étage suivant comporte une dérivation suivie d'un séparateur : elle peut être utilisée comme sortie intermédiaire. L'amplificateur de puissance délivre 2 W, puissance nécessaire pour attaquer les multiplicateurs à varactors.

b/ Multiplicateurs à varactors en cascade

Trois multiplicateurs sont utilisés pour passer de 125 MHz à 12 000 MHz (Fig. 16). Le premier multiplicateur est à constantes localisées (Fig. 17). Il s'est avèré nécessaire de blinder et de placer dans des plans différents les bobines correspondant aux trois circuits résonnants de ce multiplicateur ceci afin d'éviter les couplages entre ces circuits. Malgré cette précaution le Q des circuits à vide étant de 200, il est impossible d'éviter une modulation résiduelle à 125 MHz de la sortie. Pour la supprimer nous avons été amené à placer un filtre à 375 MHz ayant une bande passante de 10 MHz à 40 dB. Le tripleur 125-375 MHz associé à son filtre a une perte de conversion de 6 dB, 3 dB pour la multiplication et 3 dB pour le filtre. La puissance à la sortie est de 500 mW.



R = Résistance d'autopolarisation
V_2 MA 4060 A

FIG 17 Schéma du tripleur

Le deuxième multiplicateur est un quadrupleur 375-1500 MHz qui utilise des circuits à constantes localisées pour l'entrée et des éléments à constantes réparties pour le circuit idler et pour la sortie. Il est nécessaire de filtrer le signal de sortie à 1500 MHz. On ajoute un filtre comportant deux résonateurs couplés à la ligne de sortie du varactor. Le schéma de ce multiplicateur est donné par la Figure 19. La Figure 20 représente ce quadrupleur en perspective. Ce multiplicateur présente une perte de conversion de 6 dB. Nous développerons plus loin, en détail, à titre d'exemple les calculs relatifs à la réalisation de cet étage multiplicateur.

Le multiplicateur suivant est un **octupleur**. Celui-ci est constitué d'une ligne d'entrée résonnant avec le varactor sur 1500 MHz. Le circuit de sortie est formé par une cavité-hyperfréquence résonnant sur le mode TE_{011} à 12 000 MHz. Le couplage du varactor à la cavité se fait au moyen d'une boucle. La cavité est elle-même couplée au guide 3 cm au moyen d'un iris comportant un trou de couplage de 6 mm de diamètre. La puissance obtenue en bande X est voisine de 3 mW. Le multiplicateur est présenté sur la Figure 21.

2) Exemple de calcul d'un étage multiplicateur à varactor

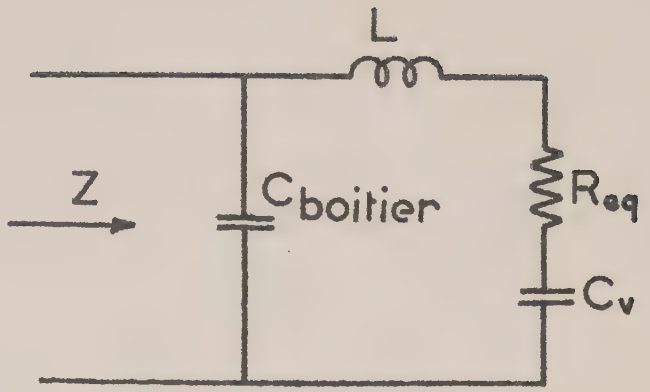
Nous résumons dans le tableau ci-dessous les différentes données relatives au problème.

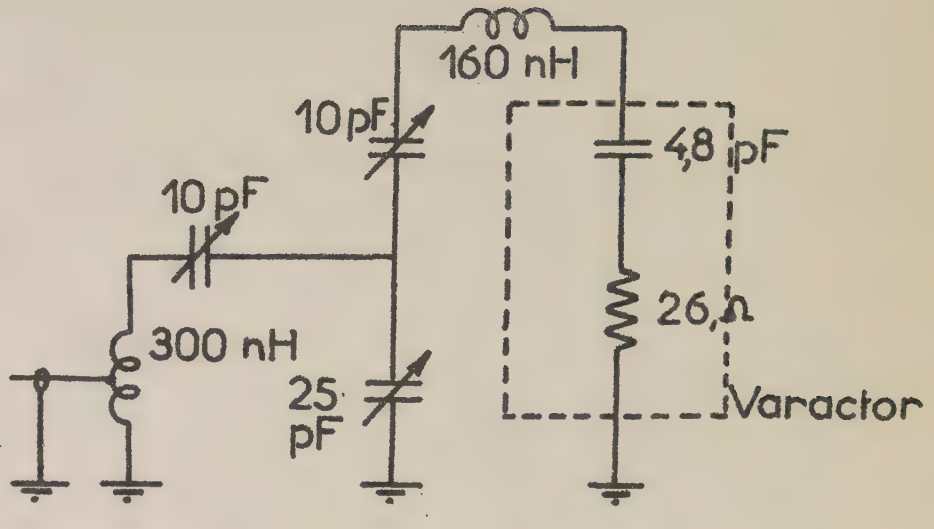
Caractéristiques recherchées

$P_{entrée}$ = 500 mW

$F_{entrée}$ = 375 MHz $\qquad$ $Z_{entrée}$ = 50 Ω

F_{sortie} =1500 MHz $\qquad$ Z_{sortie} = 50 Ω



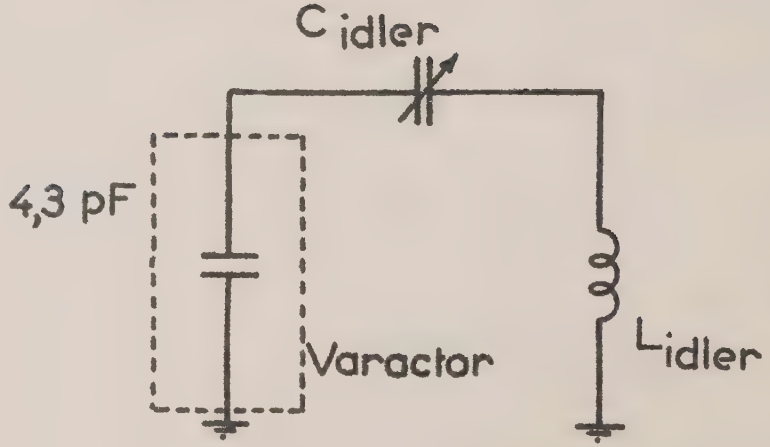


ⓐ

ⓑ

ⓒ

ⓓ



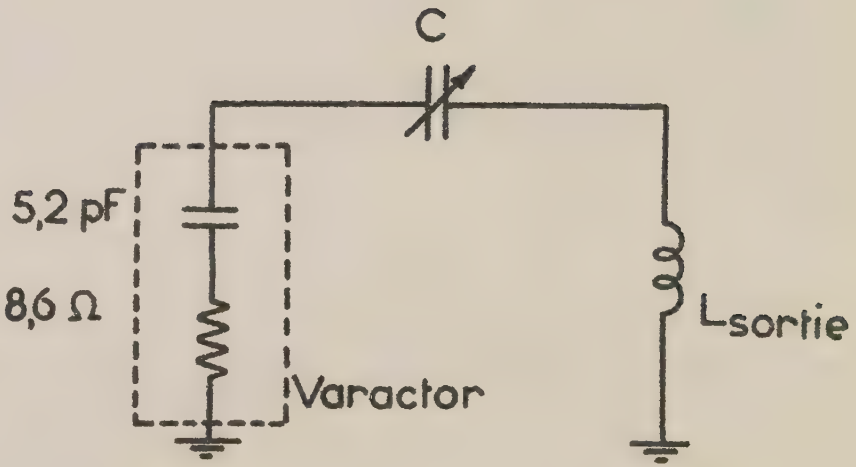


FIG 18 Circuits équivalents

a) du varactor
b) d'entrée
c) d'idler
d) de sortie

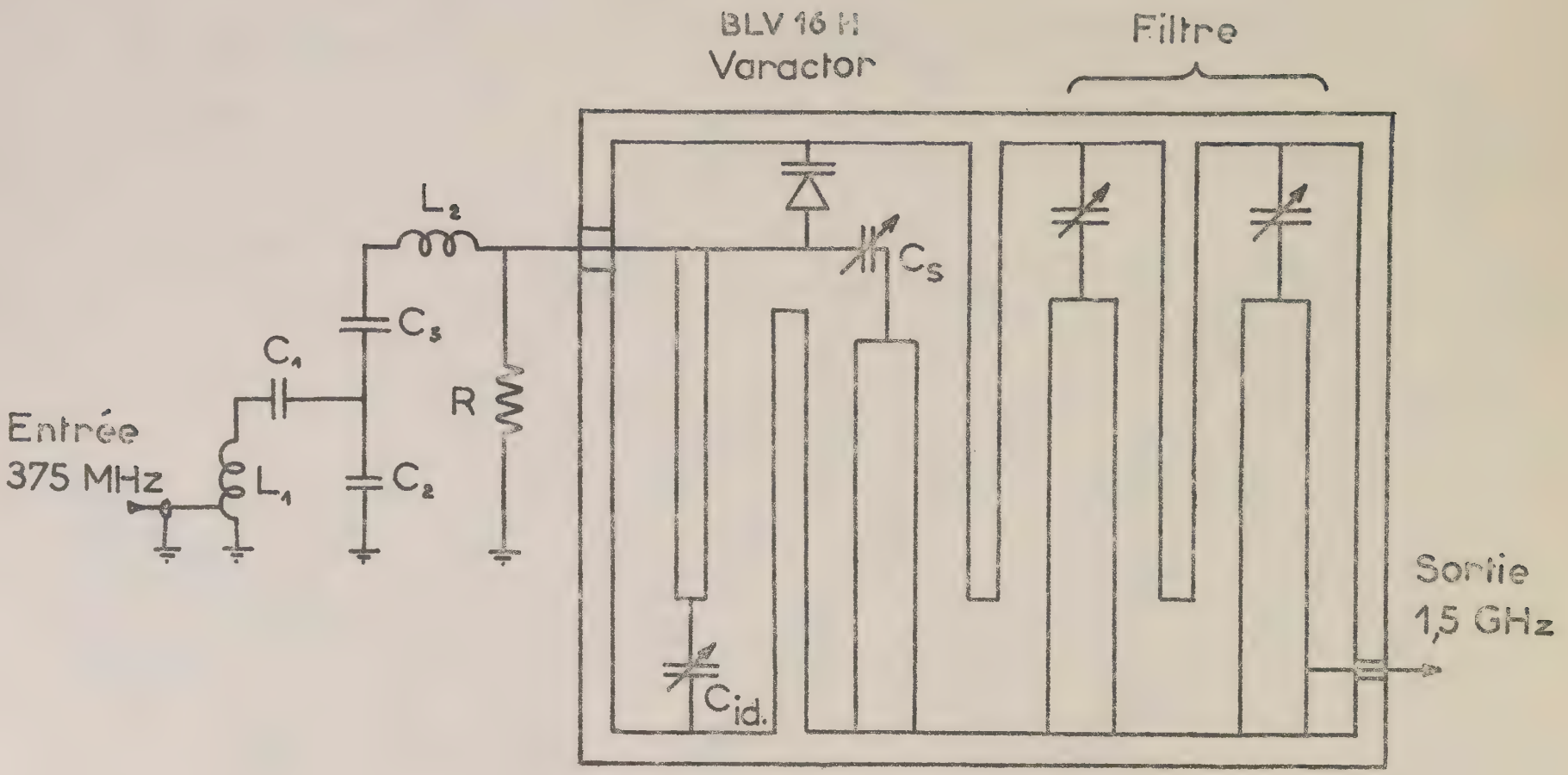


FIG 19 Schéma du quadrupleur 375 MHz-1,5 GHz

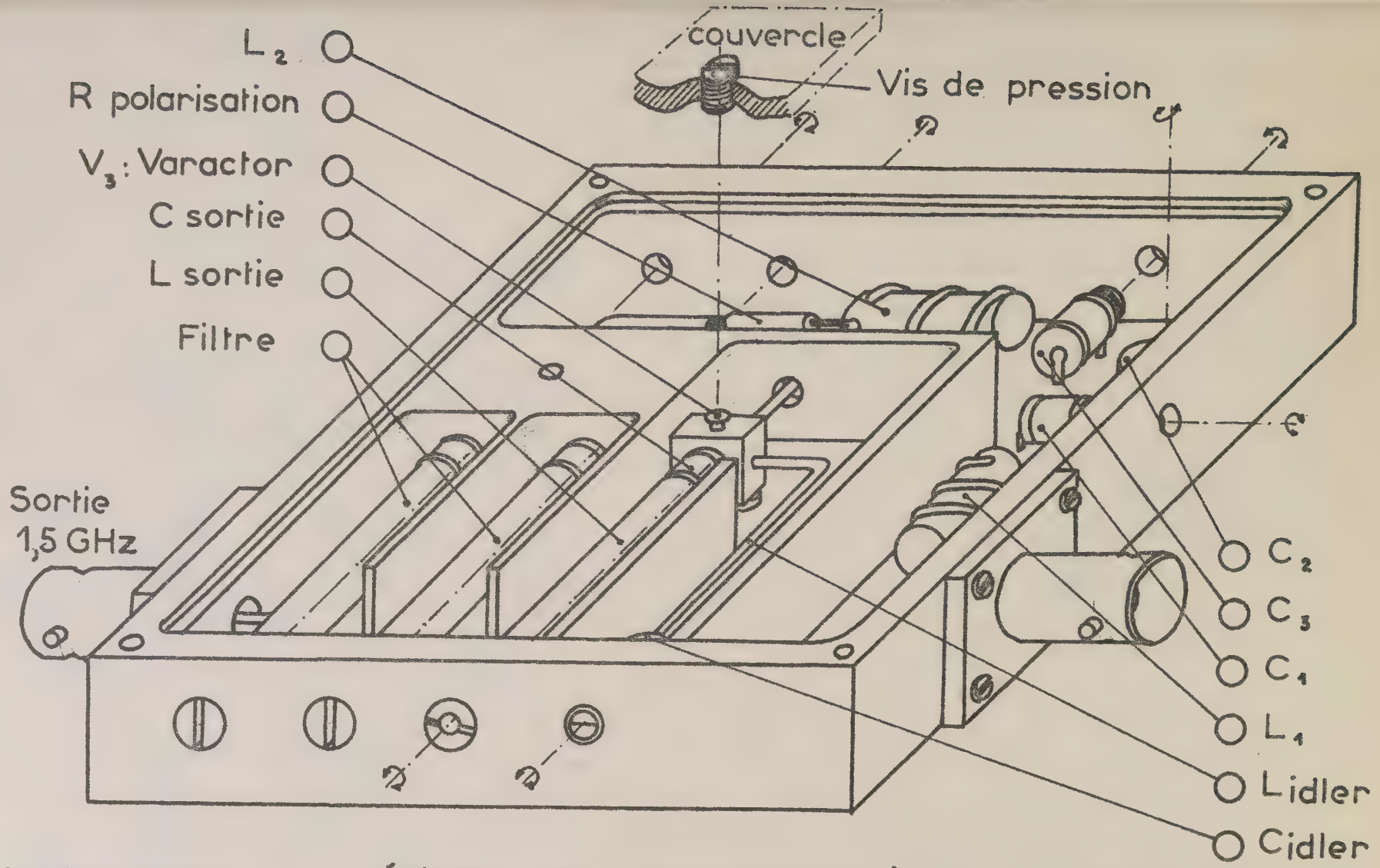


FIG 20 Quadrupleur 375 MHz – 1,5 GHz (couvercle enlevé, échelle 1,5)

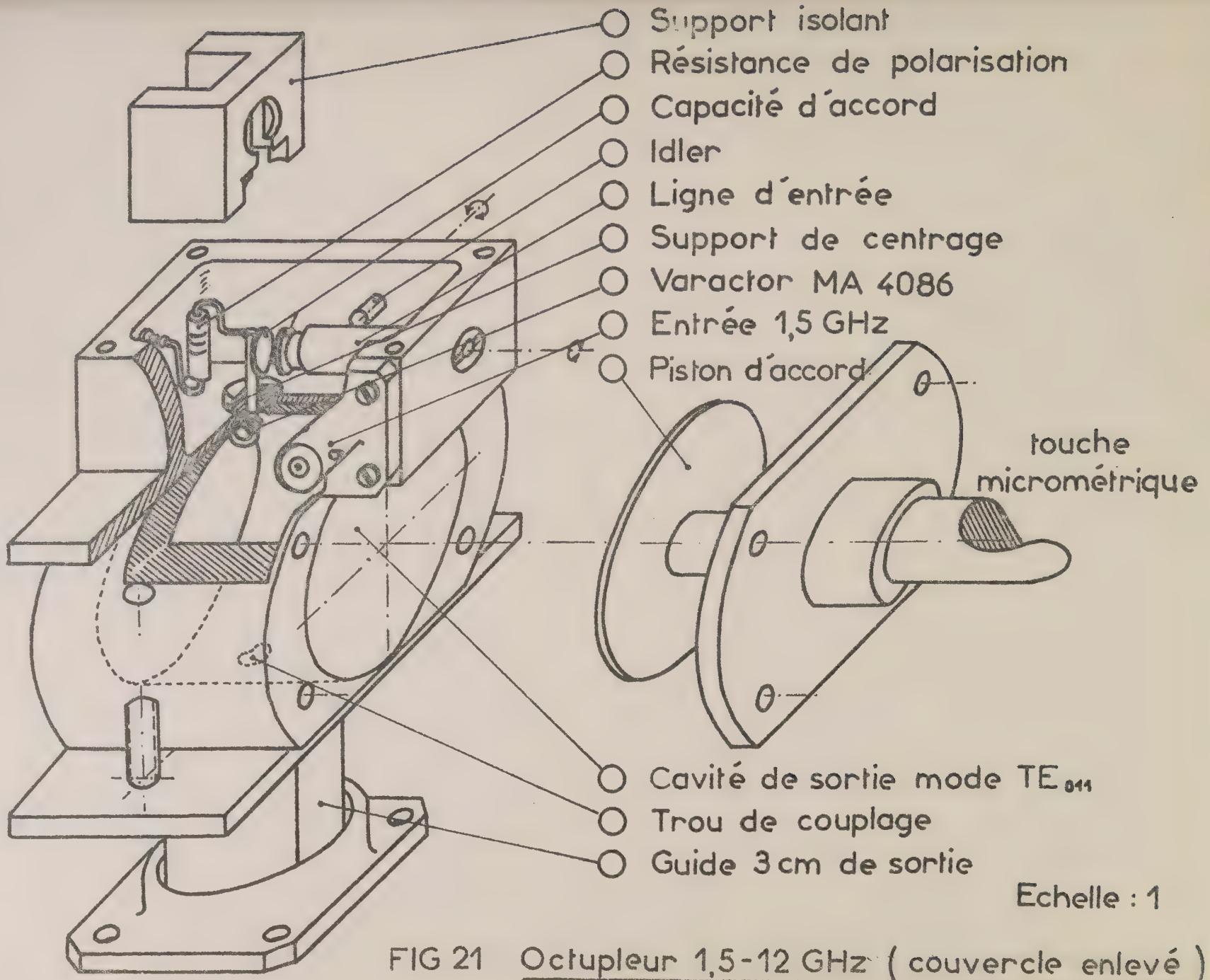


FIG 21 Octupleur 1,5-12 GHz (couvercle enlevé)

Caractéristiques nécessaires du varactor Elèments de calcul		Caractéristiques du varactor utilisé
$\alpha = 0,15$	$V_a^2 = \frac{P_e \times R_1}{\gamma \times K} = 4250\ V^2$	$V_a = 60$ V
$\beta = 62,5$	$V_a = 65$ V	$C_{min} = 1.98$ pF
$K = 0,0196$	$C_{min} = \frac{\alpha}{\omega_o \times R_1} = 1,27$ pF	$F_{coupure} = 60,4$ GHz
$\gamma = 3$		$L = 0,4$ nH
$R_1 = 50\ \Omega$	$F_c \geqslant 100\ F_{entrée}$	$C_{boitier} = 0,4$ pF

Dans ce tableau :

V_a = tension d'avalanche

C_{min} = Capacité à la tension V_a

F_c = fréquence de coupure

L = inductance série de connexions à l'intérieur du varactor

C_b = capacité parasite du boitier.

Les paramètres α, β, γ, K sont fonction du coefficient S_k. Ces paramètres peuvent être calculés pour chaque valeur du facteur de multiplication n [5] . Ces derniers déterminent la tension minimum d'avalanche V_a que doit avoir le varactor ainsi que la capacité minimum C_{min} que doit présenter celui-ci à la tension d'avalanche. La fréquence de coupure F_c du varactor doit être supérieure à la fréquence d'entrée F_e. On prend généralement

$F_c \geqslant 100\ F_e$ avec $F_c = \dfrac{1}{2\pi R_s C_{min}}$.

On choisit un varactor dont les spécifications relatives aux valeurs de V_a et C_{min} sont proches de celles que l'on a calculées précédemment. En se basant sur les caractéristiques du varactor que l'on a choisi, on détermine la valeur réelle de la puissance d'entrée nécessaire au fonctionnement correct du varactor, ainsi que celle de la résistance équivalente d'entrée R_{eq}:

$$P_{entrée} = K \times \gamma \times \omega_o C_{min} V_a^2 = 980\ mW$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{\omega_o C_{min}} = 32\ \Omega$$

Le boitier renfermant le varactor introduit des impédances parasites. En tenant compte de celles-ci on calcule l'impédance d'entrée Z du varactor (Fig. 18 a)

$$Z = R + jX$$

On utilise les relations (II.81)

$$R = \frac{R_1}{C_b^2 \omega^2 \times A} \qquad X = -\frac{R_1^2 + L - \frac{1}{C} - \frac{1}{C_b} L - \frac{1}{C}}{C_b \omega \times A}$$

$$\text{avec } A = R_1^2 + \left(L\omega - \frac{C_b + C}{C.C_b\omega} \right)^2$$

Nous avons obtenu les résultats suivants :

$Z_e = (26{,}4 - j100)\ \Omega$

$Z_i = - j48{,}6\ \Omega$

$Z_s = (8{,}6 - j20{,}4)\ \Omega$

Z_e est l'impédance d'entrée à 375 MHz

Z_i est l'impédance d'idler à 750 MHz

Z_s est l'impédance de sortie à1500 MHz

On doit noter que pour le calcul de Z_s on fait intervenir la résistance équivalente de la diode à 1500 MHz [5] :

$$R_4 = \frac{0,205}{4\omega_o C_{min}} = 11\ \Omega$$

Les impédances équivalentes de la diode aux différentes fréquences de fonctionnement étant connues, nous pouvons maintenant calculer le circuit d'entrée, le circuit d'idler et celui de sortie.

Circuit d'entrée

Les impédances des circuits idler et de sortie sont importantes à la fréquence d'entrée. Leur influence peut être négligée dans le calcul du circuit d'entrée. Le circuit d'entrée est un filtre adaptateur d'impédance (Fig. 18b)

Circuit idler (Fig. 18c)

Le circuit idler doit être découplé de l'entrée : nous mettrons en série une capacité de faible valeur C_i de l'ordre de 1,5 pF. Nous calculons la capacité équivalente à C_V et C_i :

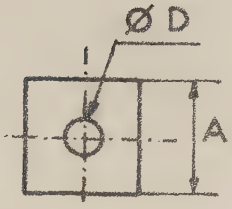
$$C = \frac{C_i C_v}{C_i + C_V} = 1,17\ pF$$

$$L_i = \frac{1}{C_i \omega_i^2} = 40\ nH \qquad \omega_i = 2\pi \times 750 \times 10^6\ rad/s$$

$$L_i \omega_i = 40 \times 10^{-9} \times 4,7 \times 10^9 = 188\ \Omega$$

Si nous prenons une cavité de 14 x 14 mm avec un conducteur central de 1 mm de diamètre, nous aurons une impédance caractéristique Z_c :

$$Z_c \simeq 138 \log \frac{A}{D} \simeq 160\,\Omega$$



A étant le côté de la cavité et D le diamètre du conducteur central.

La longueur de ligne l_i nécessaire sera donnée par la relation :

$$tg\,\beta l_i = \frac{L\omega}{Z_c} = \frac{188}{160} = 1{,}17$$

$$\beta l_i = 0{,}866 \text{ radian}$$

or $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda_i}$ avec $\lambda_i = 40$ cm

$$l_i = \frac{0{,}866 \times 40}{2\pi} = 5{,}5 \text{ cm}$$

Circuit de sortie

Le circuit de sortie comporte outre le varactor la capacité C_s et la self L_s (Fig. 18d). On choisit C_s de l'ordre du picofarad pour pouvoir utiliser une capacité variable 0,4 - 10 pF : Nous aurons alors :

$$C_{eq} = \frac{C_V C_s}{C_V + C_s} = 0{,}875 \text{ pF}$$

ce qui conduit à la valeur de L_s : $L_s = 12{,}9$ nH

$L_s \omega_s = 12.9 \times 10^{-9} \times 9,4 \times 10^9 = 121\Omega \quad \omega_s = 2\pi \times 1,5 \times 10^9 \text{ rad/s}$

En prenant une ligne de 6 mm de diamètre dans une cavité de 14 X 14 mm nous aurons $Z_c = 50\Omega$

$$\text{tg}\,\beta l_s = \frac{121}{50} = 2,42 \qquad \beta l_s = 1,17 \text{ rad} \qquad \lambda_s = 20 \text{ cm}$$

$$l_s = \frac{1,17 \times 20}{2\pi} = 3,75 \text{ cm}$$

CHAPITRE III

PERFORMANCES DES CHAINES DE MULTIPLICATION

1. MOYENS D'ETUDE :

Nous cherchons à étudier le bruit de phase et de fréquence des chaînes de multiplication. Ce bruit se présente sous forme de modulation du signal à la sortie des chaînes et il est détecté au moyen de deux appareils, le phasemètre et le discriminateur que nous étudierons avant d'aborder les problèmes propres au bruit.

1. A) Etude théorique du phasemètre

Un phasemètre (Fig. 22) est composé schématiquement de deux détecteurs de tension en différentiel. Il comporte deux entrées E_1 et E_2. Lorsqu'un signal est appliqué à une seule des entrées la valeur de la tension de sortie est nulle si le circuit est bien équilibré. Par contre en attaquant le phasemètre par deux tensions E_1 et E_2 de même fréquence mais de phase différente, la tension des diodes est $e_1 - e_2$, l'autre étant égale à $e_1 + e_2$. Il apparaîtra une tension en sortie.

a) Ondes sinusoïdales

Il vient :

$$e_1 = E \sin \omega t$$

$$e_2 = E \sin(\omega t + \varphi)$$

FIG 22

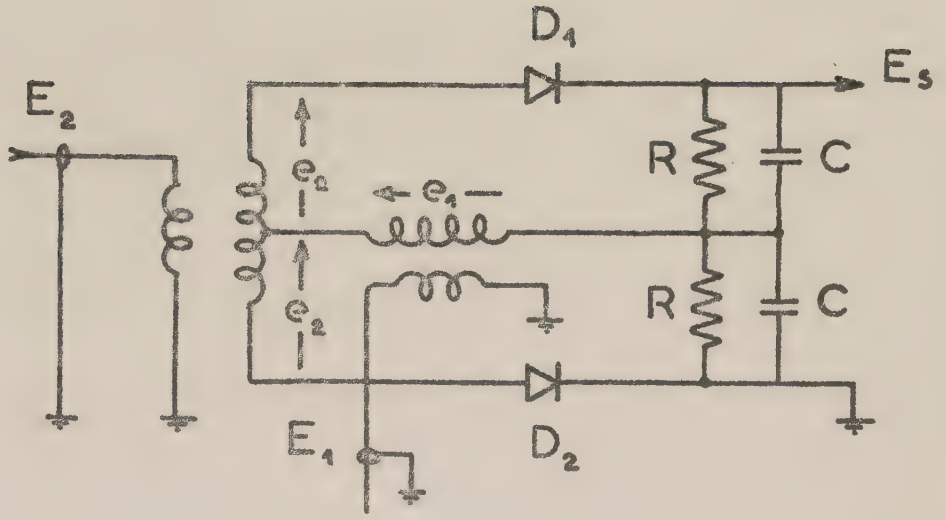
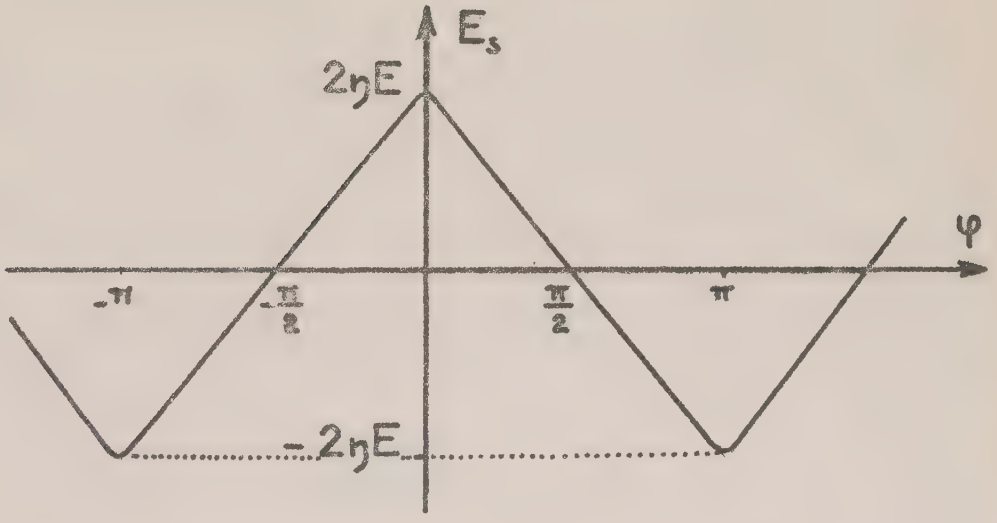


Schéma d'un phasemètre

FIG 23



Courbe de réponse d'un phasemètre

Les tensions alternatives apparaissant dans les circuits des diodes D_1 et D_2 sont respectivement e_a et e_b :

$$e_a = e_1 + e_2 = E(\sin\omega t + \sin(\omega t + \varphi))$$

$$e_a = 2E \sin\frac{2\omega t + \varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$e_b = 2E \cos\frac{2\omega t + \varphi}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$$

Les tensions de sortie continues E_a et E_b font intervenir le rendement η du détecteur :

$$E_a = 2\eta E \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$E_b = 2\eta E \sin\frac{\varphi}{2}$$

L'indication de la tension continue de sortie sera finalement :

$$E_s = E_a - E_b = 2E\left[\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right]$$

La courbe $E_s = f(\varphi)$ est pratiquement linéaire et ne présente que de légers arrondis aux différents sommets (Fig. 23)

b) Onde modulée en phase

Dans ce cas $\varphi = \delta \sin\Omega t$ où Ω est la fréquence modulante et δ l'indice de modulation. On attaque une des voies du phasemètre par une onde e_1 modulée en phase et l'autre voie par une onde e_2 de pulsation ω non modulée :

$$e_1 = E \sin(\omega t + \delta \sin \Omega t)$$

$$e_2 = E \sin \omega t$$

Nous aurons avant détection sur une des diodes une tension e_a :

$$e_a = 2E \sin(\omega t + \frac{\varphi}{2}) \cos \frac{\varphi}{2} = 2 E \sin(\omega t + \frac{\varphi}{2}) \cos(\frac{\delta}{2} \sin \Omega t)$$

or :

$$\cos(\frac{\delta}{2} \sin \Omega t) = J_o(\frac{\delta}{2}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\frac{\delta}{2}) \cos 2n\Omega t$$

En remplaçant :

$$e_a = 2E \sin(\omega t + \frac{\varphi}{2}) \left[J_o(\frac{\delta}{2}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} (\frac{\delta}{2}) \cos 2n\Omega t \right]$$

Sur l'autre diode est appliquée la tension e_b :

$$e_b = 2E \cos(\omega t + \frac{\varphi}{2}) \sin \frac{\varphi}{2} = 2E \cos(\omega t + \frac{\varphi}{2}) \sin(\frac{\delta}{2} \sin \Omega t)$$

$$\sin(\frac{\delta}{2} \sin \Omega t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1} (\frac{\delta}{2}) \sin(2n + 1)\Omega t$$

η étant le rendement de la détection :

$$E_a = 4 \eta E \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\frac{\delta}{2}) \cos 2n\Omega t$$

$$E_b = 4 \eta E \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\frac{\delta}{2}) \sin (2n + 1)\Omega t$$

$$E_s = E_a - E_b = 4 \eta E \left[\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\frac{\delta}{2}) \cos 2n\Omega t - \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\frac{\delta}{2}) \sin(2n+1)\Omega t \right]$$

Lorsque l'indice de modulation est faible les J_n sont nuls sauf J_o, J_1 :

$$E_s = - 4\eta E J_1(\frac{\delta}{2}) \sin\Omega t$$

Dans ce cas le signal de sortie est sinusoïdal à la fréquence Ω, son amplitude dépend de l'indice de modulation.

c) Onde modulée en fréquence

$$\varphi = \delta_f \sin\Omega t \qquad \text{avec} \quad \delta_f = \frac{K_f E_m}{\Omega}$$

On retrouve la même expression pour le signal de sortie lorsque l'indice de modulation est faible :

$$E_s = E_a - E_b = 4\eta E J_1(\frac{\delta_f}{2}) \sin\Omega t$$

On trouve également un signal de sortie sinusoïdal de fréquence Ω dont l'amplitude dépend de la fréquence de modulation, les $J_n(\frac{\delta_f}{2})$ dépendant de la fréquence.

Conclusion

La discrimination entre modulation de phase et de fréquence est possible lorsqu'on peut agir sur la fréquence de modulation : si, lorsque celle-ci varie, l'excursion de phase à la sortie d'un phasemètre reste constante, on est en présence d'une onde modulée en phase. Dans le cas contraire, l'onde est modulée en fréquence.

L'analyse du bruit à la sortie d'un phasemètre ne permet donc pas de discriminer le bruit de phase du bruit de fréquence étant donné que l'on n'est pas maître de la fréquence modulante.

1.B) Etude théorique du discriminateur

On utilisera le discriminateur présenté sur la Fig. 24. On supposera que les impédances de C_1, C_3, C_4 sont très faibles devant l'impédance de la self L. Avec cette hypothèse :

$$E_L = E_1$$

Calculons E_{ab} en fonction de E_1 :
On suppose que M (mutuelle inductance) est faible :

$$I \simeq \frac{E_1}{R_1 + jL_1\omega}$$

En considèrant des bobines à Q élevé $R \ll L\omega$

$$I \simeq \frac{E_1}{jL_1\omega}$$

Soit E_i la tension induite dans le secondaire :

$$E_i = \overset{+}{-} jM\omega I = \overset{+}{-} \frac{M}{L_1} E_1$$

Le signe dépendra du sens d'enroulement du primaire par rapport au secondaire, dans la suite nous prendrons le signe +.

Supposons que la charge introduite par le système de détection ne produit pas de perturbation :

$$E_{ab} = \frac{\frac{-j}{C_2\omega} E_i}{R_2 + jL_2\omega - \frac{j}{C_2\omega}} = \frac{\frac{jM}{L_1C_2\omega}}{R_2 + j\left[\frac{L_2C_2\omega^2 - 1}{C_2\omega}\right]} E_1$$

FIG 24

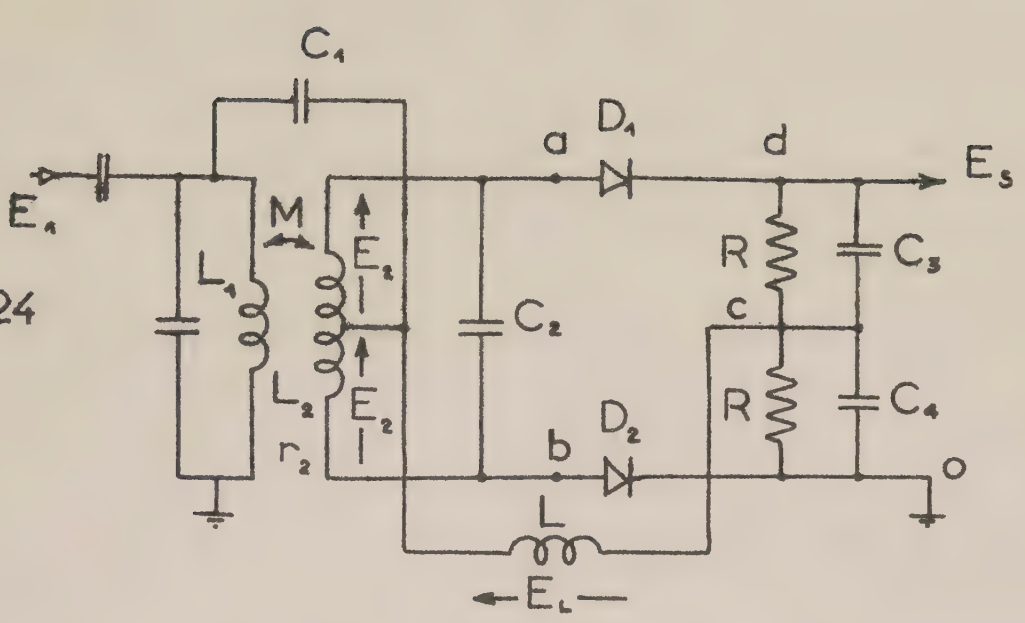
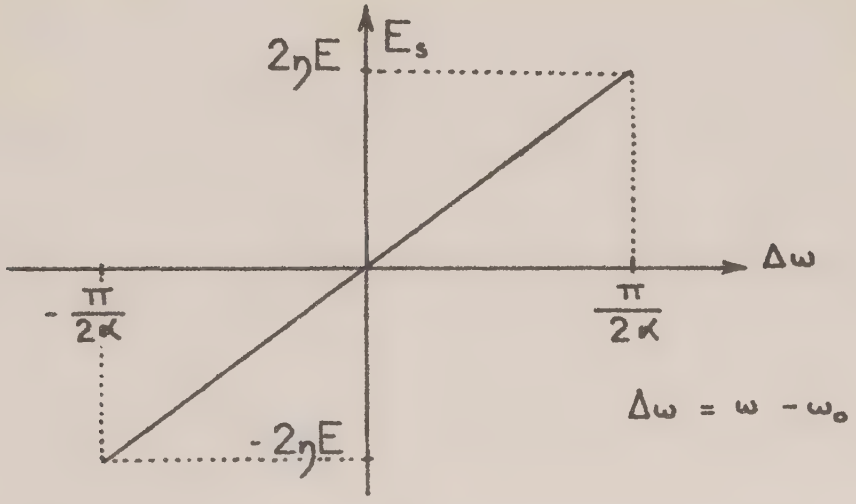


Schéma d'un discriminateur

FIG 25



Courbe de réponse du discriminateur au voisinage de la fréquence d'accord

$$E_{ab} = j \frac{M}{L_1 C_2 \omega} \frac{R_2 - j\left(L_2 C_2 \omega^2 - 1\right)\frac{1}{C_2\omega}}{D^2} E_1 = j \frac{M}{L_1 C_2 \omega} \frac{N}{D^2}$$

$$D^2 = R_2^2 + \frac{\left(L_2 C_2 \omega^2 - 1\right)^2}{C_2^2 \omega^2}$$

On introduit $\Delta\omega$ écart de fréquence de l'onde à étudier par rapport à la fréquence d'accord du secondaire ω_o :

$$\omega = \omega_o \pm \Delta\omega$$

$$N = R_2 - j \frac{L_2 C_2 \omega^2 - 1}{C_2 \omega} = R_2 - j \frac{\left(L_2 C_2 \omega_o^2 - 1 + 2 L_2 C_2 \omega_o \Delta\omega + L_2 C_2 \Delta^2\omega\right)}{C_2(\omega_o + \Delta\omega)}$$

ω_o fréquence d'accord : $L_2 C_2 \omega_o^2 - 1 = 0$

$$N = R_2 - j\, 2 L_2 \Delta\omega$$

$$N = R_2 \left[1 - j \frac{2\, Q\, \Delta\omega}{\omega}\right]$$

$$E_{ab} = j \frac{MR_2}{L_1 C_2 \omega} \times \frac{1 - j \frac{2Q\Delta\omega}{\omega}}{D^2} \qquad E_1 = A\, E_1 e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_a\right)}$$

$$A = \frac{MR_2}{L_1 C_2 \omega D^2}$$

On obtient entre E_1 et E_{ab} un écart de phase :

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi_a \qquad \text{avec} \quad tg\varphi_a = \varphi_a = \frac{2\,Q\,\Delta\omega}{\omega} = \alpha\,\Delta\omega$$

Cette dernière approximation n'est valable que si $\varphi_a \leqslant 0{,}35$ radian.

$$E_2 = \frac{E_{ab}}{2} = \frac{A}{2} E_1 e^{\,j(\frac{\pi}{2} + \varphi_a)}$$

Supposons que nous ayons $\frac{A}{2} = 1$:

$$E_2 = E_1 e^{j(\frac{\pi}{2} + \varphi_a)}$$

On applique à l'entrée la tension e_1 :

$$e_1 = E_1 \sin(\omega t + \theta) \simeq E_L$$

$$E_2 = E_1 \sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_a)$$

On repère la fréquence de e_1 par rapport à ω_o :

$$\omega = \omega_o + \Delta\omega$$

Par suite

$$\varphi_a = \alpha\,(\omega - \omega_o) = \alpha\,\Delta\omega$$

La tension appliquée à la diode D_1 est E_{ac} :

$$E_{ac} = E_L + E_2 = E_1 \left[\sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_a) + \sin(\omega t + \theta)\right] \qquad \text{(III.1)}$$

$$E_{ac} = 2\,E_1 \sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_a}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_a}{2})$$

La tension appliquée à la diode D_2 est E_{bc} :

$$E_{bc} = E_L - E_2 = E_1 \left[\sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_a) - \sin(\omega t + \theta) \right] \quad \text{(III.2)}$$

$$E_{bc} = 2E_1 \cos(\omega t + \theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_a}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_a}{2})$$

Après détection

$$E_s = 2E_1\eta \left[\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_a}{2}) - \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_a}{2}) \right] \quad \text{(III.3)}$$

Etudions différents cas :

a) onde sinusoïdale

$$e = E \sin(\omega t + \theta)$$

d'où $\varphi_a = \alpha \Delta\omega$ $\qquad \Delta\omega = \omega - \omega_o = \text{csto}$

on obtient

$$E_s = 2E\eta \left[\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha \Delta\omega}{2}) - \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha \Delta\omega}{2}) \right]$$

La représentation de $E_s = f(\Delta\omega)$ est donnée par la Fig. 25.

b) onde modulée en fréquence

$$e = E \left[\sin \omega(t) + \theta \right] \text{ avec } \omega = \omega_o + K_f E_m \sin \Omega t$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_o = K_f E_m \sin\Omega t$$

d'où $\varphi_a = \alpha \Delta\omega = \alpha K_f E_m \sin\Omega t = \delta_o \sin\Omega t$ avec $\delta_o = \alpha K_f E_m$

En remplaçant dans (III.3) on obtient la tension de sortie :

$$E_s = 2\eta E\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right)\right]$$

$$E_s = 2\eta E\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right)\right.$$
$$\left. - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right)\right]$$

En regroupant les termes :

$$E_s = 2\eta E\left[\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right) - \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right)\right]$$

$$E_s = -2\eta E\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right)$$

$$= -4\eta\sqrt{2}\, E \sin\left(\frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right)$$

En développant $\sin\left(\frac{\delta_o}{2}\sin\Omega t\right)$:

$$E_s = -4\eta\sqrt{2}\, E \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{\delta_o}{2}\right)\sin(2n+1)\Omega t$$

On voit qu'il ne subsiste que des termes d'ordre impair.

c) Onde modulée en phase

On obtient de la même façon

$$E_s = -4\eta\sqrt{2}\, E \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{\delta_o}{2}\right)\sin(2n+1)\Omega t$$

δ'_o est ici proportionnel à Ω :

$$\delta'_o = \alpha \delta_p \Omega = \alpha K_p E_m \Omega$$

D'une façon analogue au phasemètre le discriminateur permet de reconnaître si une onde est modulée en phase ou en fréquence. Une variation de la fréquence modulante Ω produit une variation de la tension de sortie du discriminateur dans le cas de la modulation de phase. Le signal de sortie demeure constant lorsqu'on a affaire à une onde modulée en fréquence.

Nous venons d'examiner les réponses du phasemètre et du discriminateur en fonction de la nature de la modulation. L'analyse du signal de sortie d'un discriminateur attaqué à l'entrée par une onde non monochromatique, fournit le spectre de fréquence noté $P_{\phi}^{\bullet}(\Omega)$. De la même façon, l'analyse du signal de sortie d'un phasemètre permet d'obtenir le spectre de puissance de la phase c'est-à-dire $P_{\phi}(\Omega)$.

Les spectres $P_{\phi}(\Omega)$ et $P_{\phi}^{\bullet}(\Omega)$ sont reliés par une relation établie au premier chapitre :

$$P_{\phi}^{\bullet}(\Omega) = \Omega^2 P_{\phi}(\Omega) \qquad \text{(III.4)}$$

Le problème du bruit des chaînes de multiplication nous conduira à étudier la forme des spectres c'est à dire $P_{\phi}(\Omega)$ et $P_{\phi}^{\bullet}(\Omega)$. A partir de ces spectres, nous pourrons tirer des conclusions sur la nature du bruit et notamment sur l'existence de perturbations périodiques.

Le tableau ci-dessous, établi à partir de la relation (III,4) permet, connaissant soit le spectre de la phase, soit le spectre de la fréquence, de déterminer le bruit affectant le signal :

$P_{\phi}(\Omega)$	$P_{\phi}^{\cdot}(\Omega)$	Nature du bruit
K_1	$K_2\Omega^2$	Bruit blanc de phase
K_3/Ω^2	K_4	Bruit blanc de fréquence
K_5/Ω	$K_6\Omega$	Bruit "flicker" de phase
K_7/Ω^3	K_8/Ω	Bruit "flicker" de fréquence

2. MESURE DU BRUIT DANS LES CHAINES DE MULTIPLICATION :

A priori, une méthode simple de mesure du bruit des chaînes de multiplication consiste à alimenter deux chaînes semblables par le même quartz et à faire battre les signaux de sortie. Cette méthode doit théoriquement du moins, éliminer le bruit du quartz.

Nous avons attaqué nos chaînes de multiplication par des quartz ayant un bruit de fréquence différent. Ce bruit sera caractérisé par la variance $\sigma_{\dot{\phi}}^2(t)$ relative à un temps d'intégration de 1 seconde. Ces mesures ont montré que le bruit mesuré à la sortie des chaînes de multiplication augmentait en même temps que la variance des fluctuations du quartz excitant celles-ci. Le bruit obtenu en faisant battre les signaux de sortie des deux chaînes de multiplication excitées par le même quartz ne peut être attribué aux chaînes seules mais aux chaînes et au quartz. Il est d'ailleurs à remarquer que de nombreux auteurs lorsqu'ils étudient le bruit des "sources" à état solide, ne s'intéressent qu'au comportement de l'ensemble formé par un quartz suivi d'une chaîne de multiplication.

Il était donc nécessaire pour évaluer le bruit d'une chaîne de multiplication de mettre au point une méthode permettant de s'affranchir du bruit des quartz.

Description de la méthode

1/ Mesure du facteur de rejection du quartz

On module en phase à la fréquence Ω le signal d'excitation des chaînes au moyen d'un modulateur de façon à obtenir une excursion de phase n'excédant pas π radian à la fréquence de sortie.

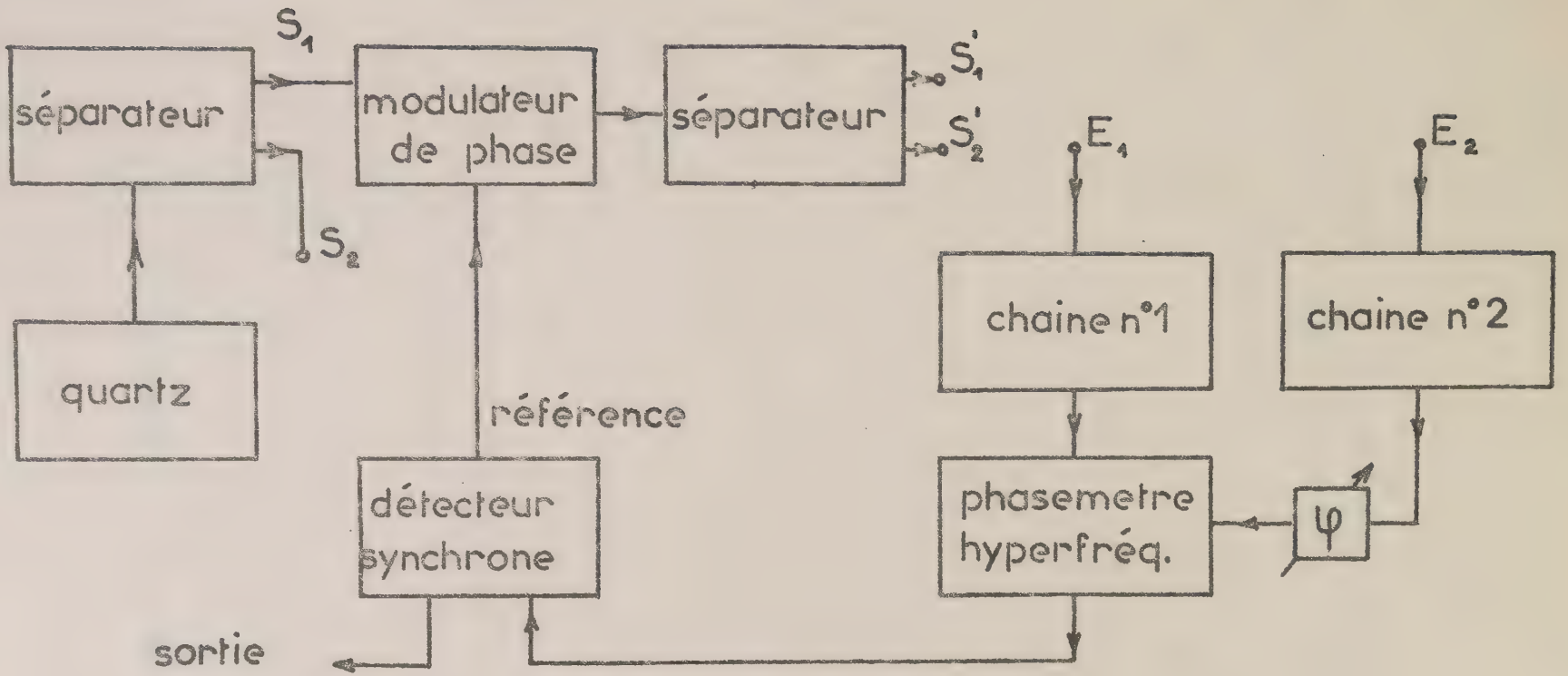


FIG 26 Montage utilisé pour la détermination du facteur de réjection

Celà implique une modulation de phase dont l'amplitude de modulation $\Delta\varphi_e$ à l'entrée des chaînes de multiplication n'excède pas π/n :

$$\frac{\Delta\varphi_s}{n} = \frac{\pi}{n}$$ n étant le facteur de multiplication

Cette restriction est nécessaire pour éviter l'apparition à la sortie du phasemètre de composantes à la fréquence $n\Omega$.

On effectue deux expériences successives qui ne diffèrent que par le mode d'excitation des chaînes de multiplication. Dans la première mesure l'une des chaînes est attaquée par le signal du quartz modulé et l'autre par le signal non modulé. Dans la deuxième expérience au contraire, l'excitation de chaque chaîne est effectuée par le même signal modulé. On mesure dans les deux cas par une méthode faisant appel à une détection synchrone, l'amplitude de la modulation du signal de battement à la sortie des multiplicateurs.

Nous avons utilisé pour cette mesure un ensemble comportant successivement les appareils suivants :

a) un séparateur à deux sorties S_1 et S_2 qui interdit tout couplage entre l'une et l'autre des sorties S_1 et S_2.

b) un modulateur de phase constitué par un circuit accordé à la fréquence à moduler. Ce circuit comporte une varicap dont la capacité varie lorsqu'on applique une tension inverse. Il en résulte un désaccord du circuit et une rotation de la phase $\Delta\varphi$ du signal à moduler.

c) un deuxième séparateur à deux sorties S_1' et S_2' évite la perturbation du fonctionnement du modulateur de phase lors de l'utilisation des sorties S_1' et S_2'.

d) Deux chaînes de multiplication de construction identiques dont nous désirons déterminer le bruit.

e) Un déphaseur variable hyperfréquence étalonné.

f) Un phasemètre hyperfréquence constitué d'un té magique et de deux porte-cristaux. On utilisera des cristaux appairés et de polarité inverse.

g) Un détecteur synchrone.

En pratique, la mesure de l'amplitude de modulation ne pose pas de problème particulier ; nous avons cependant utilisé un détecteur synchrone pour améliorer la précision de la mesure. Son emploi est rendu possible par l'utilisation d'une modulation monochromatique.

Le déphaseur variable hyperfréquence nous permet de décrire la caractéristique du phasemètre et de choisir une zone de fonctionnement linéaire.

On obtient le facteur de rejection en faisant le rapport des amplitudes de modulation obtenues dans les deux expériences décrites précédemment. La connaissance de ce facteur de rejection nous permettra de déterminer le bruit propre des chaînes de multiplication en éliminant le bruit du signal d'excitation. Cette opération implique quelques hypothèses qui seront précisées par la suite.

2/ Mesure du bruit propre des chaînes de multiplication

Cette mesure comporte deux expériences distinctes : tout d'abord nous enregistrons les fluctuations de phase existant entre les signaux issus des deux chaînes lorsqu'elles sont pilotées par un même quartz. Nous devons ensuite dissocier du résultat de cette mesure, le bruit propre du quartz atténué par le processus de réjection. Ceci implique une mesure du bruit propre du quartz : cette expérience est effectuée en utilisant deux quartz identiques, qui attaqueront chacune des chaînes. On mesurera les fluctuations de fréquence par une méthode de comptage.

L'hypothèse de l'identité, du point de vue du bruit est justifiée et vérifiable par des méthodes d'analyse spectrale utilisant un Maser comme signal de référence [8] .

A) Mesure du bruit de sortie des chaînes de multiplication

La mesure du bruit propre du quartz fait appel à des techniques de mesure de fluctuations de fréquences alors que le bruit de sortie des chaînes de multiplication pour des raisons évidentes de sensibilité est mesuré à l'aide d'un phasemètre. Ce dernier bruit devra donc également être exprimé en bruit de fréquence pour pouvoir éliminer la contribution du quartz. Ceci implique le calcul des fluctuations de fréquence du signal de sortie des chaînes à partir des fluctuations de phase. Ce calcul nécessite la connaissance du spectre de phase P_{ϕ}.

Nous enregistrons les fluctuations de phase $\sigma\,\phi(\tau)$ pour différentes valeurs de la constante de temps τ (Fig. 27) et nous

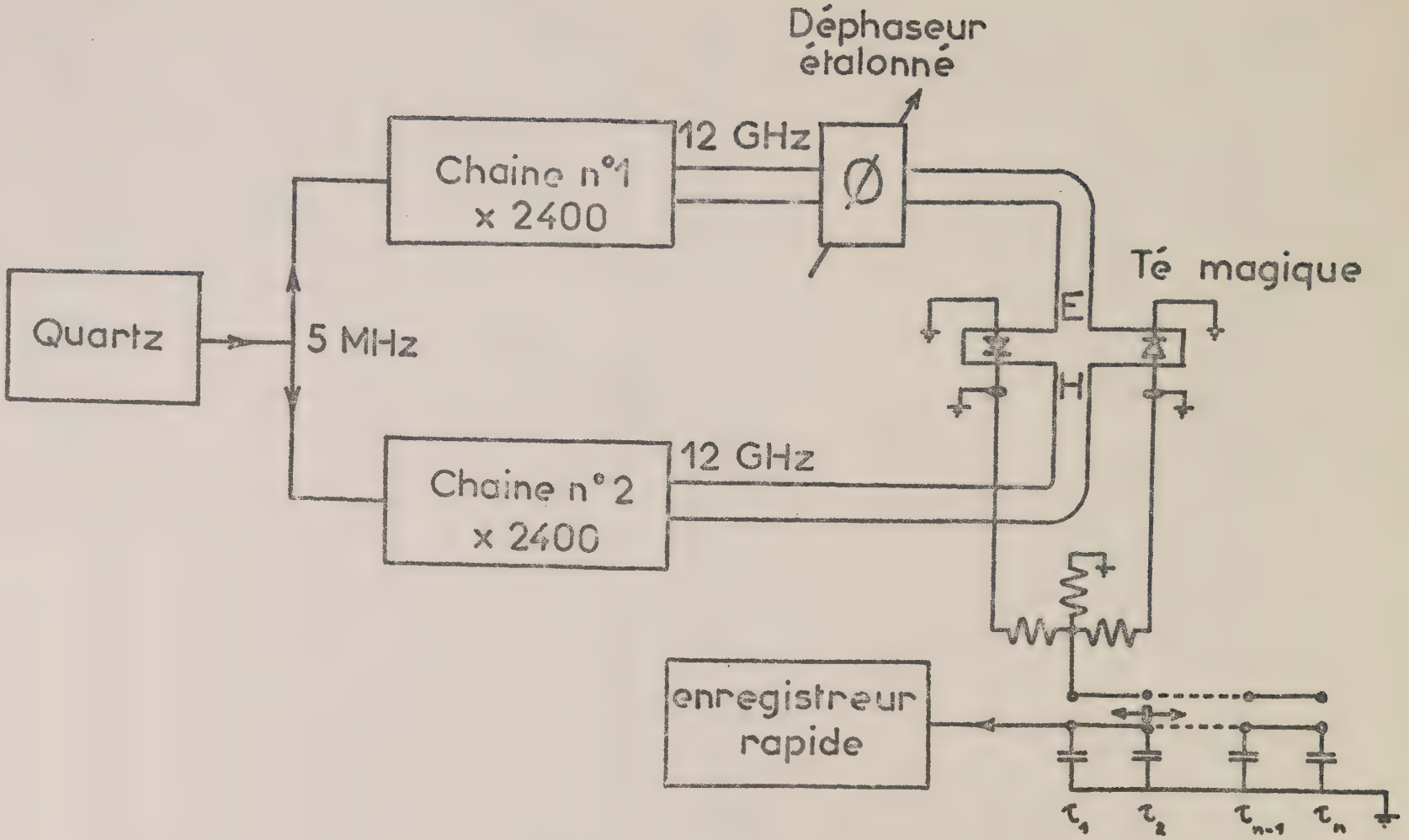


FIG 27 Schéma de mesure des fluctuations de phase

calculerons le carré moyen des fluctuations de phase $\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)$ correspondant à ces différentes constantes de temps τ . Nous utiliserons ensuite les relations suivantes :

$$\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau) = 2\int_0^{\infty} P_{\phi}(f) \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2} df \qquad \text{(III.5)}$$

Une formule identique relie $\overline{\sigma}^{2}_{\phi\cdot}(\tau)$ au spectre de fréquence $P_{\phi}^{\cdot}$

$$\overline{\sigma}^2_{\phi\cdot}(\tau) = 2\int_0^{\infty} P_{\phi}^{\cdot}(f) \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2} df = 2\int_0^{\infty} f^2 P_{\phi}(f) \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2} df \qquad \text{(III.6)}$$

$\overline{\sigma}^{2\cdot}_{\phi}(\tau)$ est le carré moyen des fluctuations de fréquence correspondant à différentes constantes de temps τ .

Dans ces relations $\frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2}$ s'introduit lorsqu'on exprime l'intégration du bruit sur un temps limité τ .

Nous avons recherché une forme analytique pour P_{ϕ} qui soit en accord avec les résultats expérimentaux : la vérification s'effectue en utilisant la relation (III.5). Nous avons utilisé la remarque suivante : l'expression analytique des spectres de bruit au voisinage de la fréquence porteuse est toujours une fonction f^k de la fréquence où k est une constante. Dans tous les cas nous pouvons écrire :

$$P_{\phi} = P_{0_k} f^k \qquad \text{(III.7)}$$

Cette expression comprend deux constantes P_{0k} et k que nous déterminerons de la façon suivante :

a) Nous calculerons $\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)$ pour une valeur de τ à l'aide de l'expression (III.5), P_{ϕ} étant donné par la relation (III.7). Ce calcul sera effectué pour différentes valeurs de k ($k_1 = -\frac{1}{2}$ $k_2 = -1$ $k_3 = -\frac{3}{2}$. Nous noterons ces résultats $\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_k$.

Le rapport de la valeur expérimentale $\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)$ à la valeur calculée $\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_k$ donne le coefficient $P_{0,k}$ par lequel doit être multiplié f^k:

$$\frac{\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)}{\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_k} = P_{0k}$$

b) Nous calculerons le carré moyen des fluctuations $\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_k$ pour différentes valeurs de τ et ceci pour $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = -1$ $k_3 = -\frac{3}{2}$, en remplaçant P_{ϕ} par son expression dans la relation (III.5) :

$$P_{\phi} = P_{0k} f^k$$

$$\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_k = 2\int_0^{\infty} P_{0k} f^k \frac{\sin^2 \pi f\tau}{(\pi f\tau)^2} df$$

c) Le tracé sur le même graphique des variables $\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_k$ et $\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)$ en fonction de τ permettra de déterminer la valeur de k pour laquelle le carré moyen théorique $\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_k$ se rapproche le plus de la valeur expérimentale $\overline{\sigma}^2_{\phi}(\tau)$.

La forme analytique de P_{ϕ} est donc déterminée puisque nous connaissons la valeur de deux coefficients P_{0k} et k. Il suffira

ensuite d'utiliser la relation (III.6) pour calculer $\overline{\sigma}^{2}_{\phi}(\tau)$:

$$\overline{\sigma}^{2}_{\phi}(\tau) = 2 \int_{0}^{\infty} f^{2} \, P_{0k} f^{k} \, \frac{\sin^{2} \pi f \tau}{(\pi f \tau)^{2}} \, df$$

Les phénomènes de bruit sont aléatoires et il n'y a, à priori, aucune corrélation entre les fluctuations du quartz et les fluctuations intrinsèques des chaînes de multiplication. Dans ces conditions, on peut relier les fluctuations $\overline{\sigma}^{2}_{\phi}(\tau)_{S_1}$ du signal de sortie des chaînes attaquées par le même quartz aux fluctuations propres du quartz et des chaînes c'est-à-dire respectivement $\overline{\sigma}^{2}_{\phi}(\tau)_{q}$ et $\overline{\sigma}^{2}_{\phi}(\tau)_{c}$:

$$\overline{\sigma}^{2}_{\phi}(\tau)_{S_1} = 2 \, \overline{\sigma}^{2}_{\phi}(\tau)_{c} + \frac{\overline{\sigma}^{2}_{\phi}(\tau)_{q}}{R} \qquad \text{(III.8)}$$

R étant le facteur de rejection. Nous avons supposé que les deux chaînes de multiplication sont identiques du point de vue du bruit.

B) Mesure des fluctuations de fréquence du battement de deux quartz

Cette expérience consiste à exciter la chaîne n° 2 par un deuxième quartz Q_2 et à conserver le quartz Q_1 utilisé précédemment pour exciter la chaîne n° 1 (Fig. 27). Nous ferons battre les signaux hyperfréquence issus de chaque chaîne. Un battement de période T comprise entre 0,1 s et 2×10^{-4} s peut être obtenu en faisant varier la fréquence d'un des quartz. Nous effectuerons la mesure du battement en période pour obtenir une plus grande précision : le battement aura la fréquence F :

$$f_2 - f_1 = F = \frac{1}{\bar{T}}$$

f_1 et f_2 étant les fréquences instantanées du signal de sortie de chaque chaîne :

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta (f_2 - f_1)}{F} = - \frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{|\Delta T|}{T^2} = \Delta (f_2 - f_1)$$

$$\frac{\bar{\sigma}^2(\Delta T)}{\bar{T}^2} = \bar{\sigma}^2(\Delta f_1) + \bar{\sigma}^2(\Delta f_2)$$

Or

$$\bar{\sigma}^2 (\Delta f_1) = \bar{\sigma}^2_{\emptyset\bullet} (\tau)_{q_1} + \bar{\sigma}^2_{\emptyset\bullet} (\tau)_{c_1}$$

où le deuxième terme représente le bruit propre de la chaîne n° 1. On a de même :

$$\bar{\sigma}^2(\Delta f_2) = \bar{\sigma}^2_{\emptyset\bullet}(\tau)_{q_2} + \bar{\sigma}^2_{\emptyset\bullet}(\tau)_{c_2}$$

Compte tenu de l'hypothèse d'identité des chaînes du point de vue bruit :

$$\frac{\bar{\sigma}^2(\Delta T)}{T^2} = \bar{\sigma}^2_{\emptyset\bullet}(\tau)_{S_2} = 2\ \bar{\sigma}^2_{\emptyset\bullet}(\tau)_{c} + \bar{\sigma}^2_{\emptyset\bullet}(\tau)_{q_1} + \bar{\sigma}^2_{\emptyset\bullet}(\tau)_{q_2} \qquad \text{(III.9)}$$

On considère deux quartz identiques :

$$\bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)_{q_1} = \bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)_{q_2} = \bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)_{q}$$

L'expression (III.9) devient :

$$\bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)_{S_2} = 2\,\bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)_{C} + 2\,\bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)_{q} \qquad \text{(III.10)}$$

Cette équation est la deuxième relation recherchée.
Pour simplifier l'écriture nous prendrons comme notation :

$$\bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)_{S_1} = a \quad \bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)_{S_2} = b \quad \bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)_{C} = x \quad \bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)_{q} = y$$

Les relations (III.8) et (III.10) fournissent un système de deux équations à 2 inconnues :

$$\begin{aligned} a &= 2x + \frac{y}{R} \\ b &= 2x + 2y \end{aligned} \qquad \text{(III.11)}$$

$$x = \left(2a - \frac{b}{R}\right)\frac{R}{4R-2} \qquad y = (b-a)\frac{R}{2R-1}$$

Si $4R \gg 2$ $\qquad x = \frac{a}{2} - \frac{b}{4R} \qquad y = \frac{b-a}{2}$

Nous sommes donc en mesure par cette méthode de déterminer le bruit des chaînes de multiplication et le bruit des quartz.

C) Mesure à très court terme des fluctuations de phase

Les méthodes d'enregistrement de la phase ne permettent pas de mesurer celles-ci sur des temps d'intégration τ inférieurs à 2×10^{-4} s. La limitation est due à la constante de temps du galvanomètre enregistreur (10^{-4} s.)

Pour mesurer les fluctuations de fréquence sur des temps inférieurs à 2×10^{-4} s, nous avons utilisé des méthodes d'auto corrélation. La connaissance de la fonction d'autocorrélation de la phase $C_\phi(\tau)$ permet de calculer le carré moyen des fluctuations de fréquence sur un temps d'intégration τ. On utilise la relation suivante [1] :

$$\bar{\sigma}^2_{\phi\cdot}(\tau) = \frac{2}{\tau^2}\left[C_\phi(0) - C_\phi(\tau)\right] \qquad \text{(III.13)}$$

Il est nécessaire d'étalonner la fonction d'autocorrélation c'est-à-dire de déterminer $C_\phi(0)$. Pour ce faire il suffira de considèrer une valeur $\tau = \tau_1$ à partir de laquelle la fonction d'autocorrélation $C_\phi(\tau_1)$ devient négligeable. Nous pouvons ainsi par une méthode classique déterminer $C_\phi(0)$ lorsque l'on connaît le carré moyen des fluctuations de fréquences sur un temps d'intégration τ_1.

$$\bar{\sigma}^2_{\phi\cdot}(\tau_1) = \frac{2}{\tau_1^2}\left[C_\phi(0) - C_\phi(\tau_1)\right] \approx \frac{2}{\tau_1^2} C_\phi(0)$$

d'où

$$C_\phi(0) = \frac{\tau_1^2}{2} \bar{\sigma}^2_{\phi\cdot}(\tau_1) \qquad \text{(III.14)}$$

$\bar{\sigma}^2_{\phi\cdot}(\tau_1)$ est déterminé par des méthodes classiques ce qui implique $\tau_1 > 2 \times 10^{-4}$ s.

Nous pouvons remarquer qu'il nous était possible d'utiliser non pas la fonction d'autocorrélation de la phase $C_{\phi}(\tau)$ mais la fonction d'autocorrélation de la fréquence $C_{\dot{\phi}}(\tau)$.

Le carré moyen des fluctuations de fréquence $\overline{\sigma}^2_{\dot{\phi}}(\tau)$ pourrait être calculé à partir de la fonction $C_{\dot{\phi}}(\tau)$ au moyen de l'expression :

$$\overline{\sigma}^2_{\dot{\phi}}(\tau) = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} C_{\dot{\phi}}(\tau)\ (1 - \frac{\tau'}{\tau})\ d\tau' \qquad \text{(III.15)}$$

La fonction d'autocorrélation est tracée point par point. Le corrélateur qui possède un temps minimum d'intégration τ_n fournit n points (n = 100) de la fonction d'autocorrélation, τ variant entre 0 et $100\tau_n$. On obtient :

$$\overline{\sigma}^2_{\dot{\phi}}(\tau) = \frac{2}{\tau}\sum_{0}^{n=100} C_{\dot{\phi}}(\tau_n)(1 - \frac{n}{100}) \qquad \text{(III.16)}$$

Il est évident que ce calcul nécessite comme précédemment un étalonnage de la courbe $C_{\dot{\phi}}(\tau)$.

3. RESULTATS DES MESURES :

1) Facteur de réjection

Nous avons mesuré au moyen de la méthode décrite au début de ce chapitre le facteur de réjection des fluctuations du quartz. L'erreur de mesure introduite par la mesure est très faible, nous obtenons :

$$R = 70 \pm 3$$

2) Enregistrement des fluctuations de phase

Nous avons ensuite procédé à l'enregistrement des fluctuations de phase en effectuant le montage de la Fig. 26. Le signal à 5 MHz délivré par un quartz métrologique est envoyé sur deux chaînes de multiplication de fréquence. Les signaux de sortie à 12 GHz sont comparés en phase au moyen d'un phasemètre hyperfréquence. Un déphaseur hyperfréquence variable étalonné introduit dans une des voies du phasemètre permettra l'étalonnage de la tension de sortie V de ce phasemètre.

Nous avons enregistré les fluctuations de phase pour différentes constantes de temps :

$$\tau = 0{,}1 \ , \ 2.10^{-2} \quad 10^{-2} \quad 2.10^{-3} \quad 10^{-3} \quad 2.10^{-4} s.$$

Le dépouillement des enregistrements a été fait en effectuant un lissage sur 0,3 seconde permettant ainsi de supprimer les variations lentes du signal de sortie du phasemètre dues essentiellement à des dérives thermiques des composants des chaînes de multiplication.

Le calcul des carrés moyens des fluctuations de phase $\bar{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_{S_1}$ à partir de ces enregistrements conduit aux valeurs suivantes :

Constante de temps τ seconde	10^{-1}	2.10^{-2}	10^{-2}	2.10^{-3}	10^{-3}	2.10^{-4}
$\bar{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_{S_1}$ 10^{-3} rad^2	1,5	7,5	11,2	12	17	43

Nous recherchons l'expression du spectre de phase P_ϕ :

a) Nous calculons $\overline{\sigma}^2_\phi(\tau)$ pour 0,1 s à l'aide de l'expression (III.5), P_ϕ étant donné par la relation (III.7). Nous effectuons ce calcul pour $k = -\frac{1}{2}$, $k = -1$, $k = -\frac{3}{2}$: Nous avons fait lors du dépouillement des enregistrements de phase un lissage sur 0,3 seconde ; la limite inférieure d'intégration est dès lors égale à $\frac{1}{\tau}$: elle est de l'ordre de 3 Hz.

$$\overline{\sigma}^2_\phi(\tau) = 2\int_3^\infty P_{0k}\, f^k \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2}\, df \qquad \text{(III.17)}$$

En posant :

$$I = 2\int_3^\infty f^k \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2}\, df \qquad \text{(III.18)}$$

On obtient

$$\overline{\sigma}^2_\phi(\tau) = I \times P_{0k}$$

Les calculs pour les trois valeurs de k sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	$k = -\frac{1}{2}$	$k = -1$	$k = -\frac{3}{2}$
① $\overline{\sigma}^2_\phi(\tau)$ 10^{-3} rad^2	1,52	1,52	1,52
② I	0,906	0,420	0,209
③ $P_{0k} = \frac{①}{②}$ 10^{-3} rad^2. s	1,7	3,6	7

(III.19)

Nous avons donc à notre disposition trois fonctions P_ϕ qui conduisent à des valeurs de $\overline{\sigma}^2_\phi(\tau)$ coïncidant, par hypothèse, avec la valeur expérimentale correspondant à $\tau = 0{,}1$ s :

$$P_{\phi_1} = 1{,}7 \times 10^{-3} \times f^{-\frac{1}{2}} \text{ rad}^2.\text{s} \qquad \text{(III.20}\alpha\text{)}$$

$$P_{\phi_2} = 3{,}6 \times 10^{-3} \times f^{-1} \text{ rad}^2.\text{s} \qquad \text{(III.20}\beta\text{)}$$

$$P_{\phi_3} = 7 \times 10^{-3} \times f^{-\frac{3}{2}} \text{ rad}^2.\text{s} \qquad \text{(III.20}\gamma\text{)}$$

Nous allons chercher le carré moyen des fluctuations de phase $\overline{\sigma}^2_\phi(\tau)$ donnés par la relation (III.5), en remplaçant successivement pour chaque valeur de τ, P_ϕ par son expression obtenue dans les équations (III.20). Ces calculs sont résumés dans le tableau (21a). Dans le tableau (21b), nous avons fait une comparaison entre les valeurs expérimentales et celles obtenues par le calcul en attribuant à P_ϕ, les valeurs données par les relations (III.20)

	$\overline{\sigma}^2_\phi(\tau)_k \; 10^{-3} \; \text{rad}^2$		
τ s	$k = -\frac{1}{2}$	$k = -1$	$k = \frac{3}{2}$
0,1 s	1,5	1,5	1,5
2.10^{-2}	9,7	6,8	5
10^{-2}	16	9,1	7
2.10^{-3}	41	15,4	7,6
10^{-3}	58	18,2	8,5
2.10^{-4}	130	28	9,5

Tableau 21a

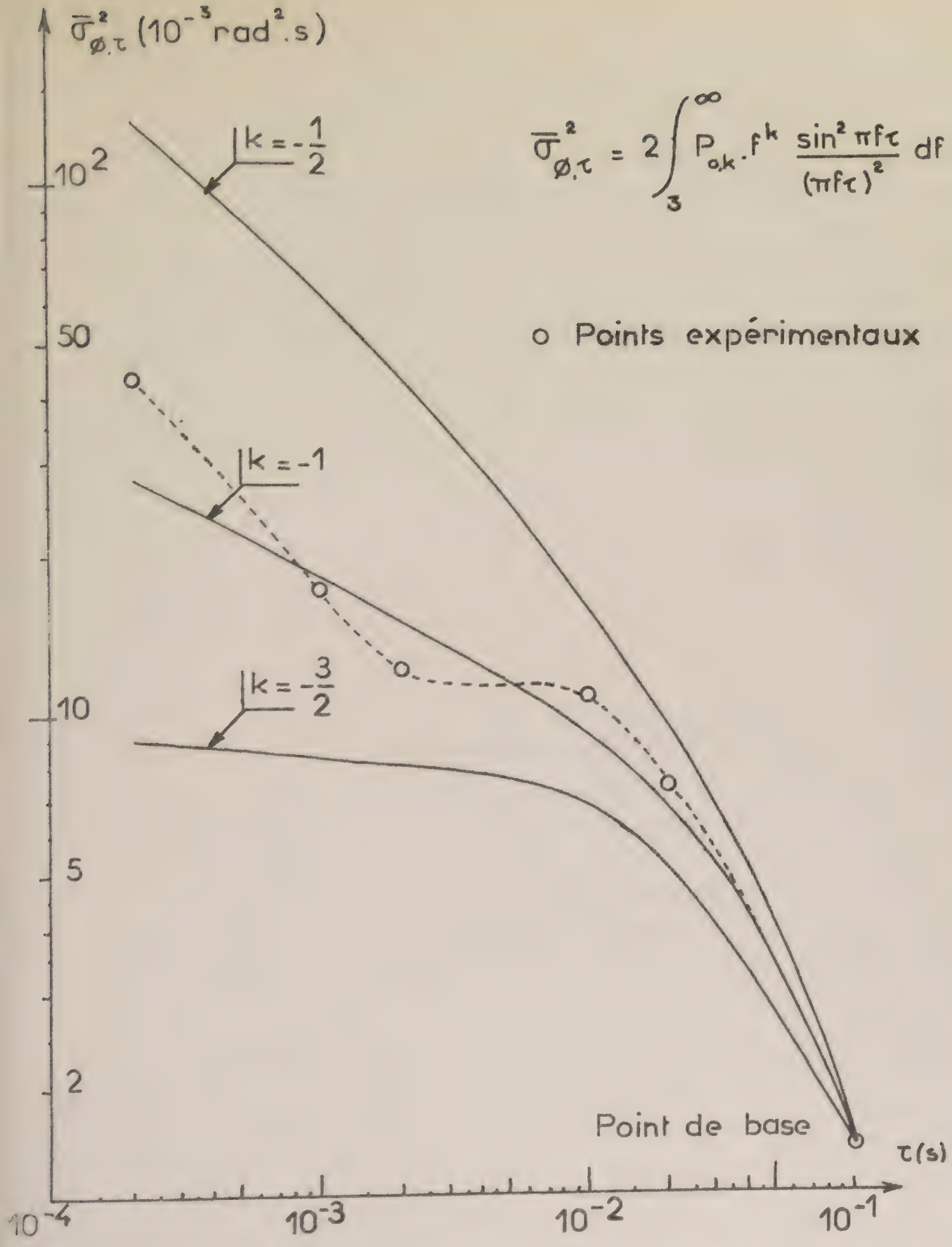


FIG 28 Détermination du coefficient k

τ s	$\bar{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_{S_1}$ 10^{-3}rad^2	$\frac{(\bar{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_{S_1} - \bar{\sigma}^2_{\phi,(\tau)_k}) \times 100}{\bar{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_{S_1}}$		
		$k = -\frac{1}{2}$	$k = -1$	$k = -\frac{3}{2}$
0,1	1,5	0 %	0 %	0 %
2.10^{-2}	7,5	30 %	- 9 %	- 33 %
10^{-2}	11,2	43 %	- 19 %	- 38 %
2.10^{-3}	12	242 %	28 %	- 37 %
10^{-3}	17,3	231 %	5 %	- 50 %
2.10^{-4}	43,5	200 %	35 %	- 78 %

Tableau 21b

On a tracé sur le même graphique (Fig. 28) les courbes théoriques $\bar{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_k$ et expérimentales $\bar{\sigma}^2_{\phi}(\tau)_{S_1}$. On observe que la courbe théorique correspondant à $k = -1$, relation (III.20β) coïncide avec la courbe expérimentale : l'approximation obtenue est satisfaisante.

La détermination de k nous conduit à choisir un spectre théorique caractérisant un bruit "flicker" de phase : $P_{\phi} = P_0 f^{-1}$
On en déduit la valeur des fluctuations de fréquence $\bar{\sigma}^{2\phi}_{\phi}(\tau)_{S_1}$

$$\bar{\sigma}^{2\phi}_{\phi}(\tau)_{S_1} = 2\int_0^{\infty} f^2 \times 3{,}6 \times 10^{-3} \times f^{-1} \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2}\, df \qquad \text{(III.22)}$$

Nous conservons les mêmes limites d'intégration que précédemment ; la limite inférieure est égale à 0,3 s pour tenir compte du lissage éliminant les dérives lentes de la phase :

$$\overline{\sigma}^2_{\phi\bullet}(\tau)_{S_1} = 7{,}2 \times 10^{-3} \int_3^{\infty} \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi\tau)^2 f} \, df \qquad \text{(III.23)}$$

La courbe représentative $a = \overline{\sigma}^2_{\phi\bullet}(\tau)_{S_1}$ en fonction de τ est donnée par la figure 29.

3) Enregistrement des fluctuations de fréquence

Nous réalisons la deuxième expérience (montage Fig. 27) permettant de déterminer $\overline{\sigma}^2_{\phi\bullet}(\tau)_{S_2} = b$. Les résultats de cette dernière mesure sont donnés par la figure 30.

Les carrés moyens des fluctuations de fréquence des chaînes de multiplication et du quartz $x = \overline{\sigma}^2_{\phi\bullet}(\tau)_c$ et $y = \overline{\sigma}^2_{\phi\bullet}(\tau)_q$ sont obtenus au moyen des relations (III.12) en remplaçant a et b par leurs valeurs déduites des Figures 29 et 30 pour un temps d'intégration donné. Les courbes représentatives de $x(\tau)$ et $y(\tau)$ sont tracées sur la Figure 31.

On caractérise généralement un oscillateur par ses fluctuations relatives de fréquence sur un temps d'intégration τ . Nous caractérisons de la même façon les chaînes de multiplication par leurs fluctuations relatives de fréquence $\frac{\Delta F}{F}(\tau)$.

F est la fréquence à laquelle les mesures ont été effectuées c'est-à-dire 12 GHz.

Nous tracerons les courbes représentatives des fluctuations relatives de fréquence $\frac{\Delta F}{F}$ des chaînes de multiplication et du quartz (Fig. 34).

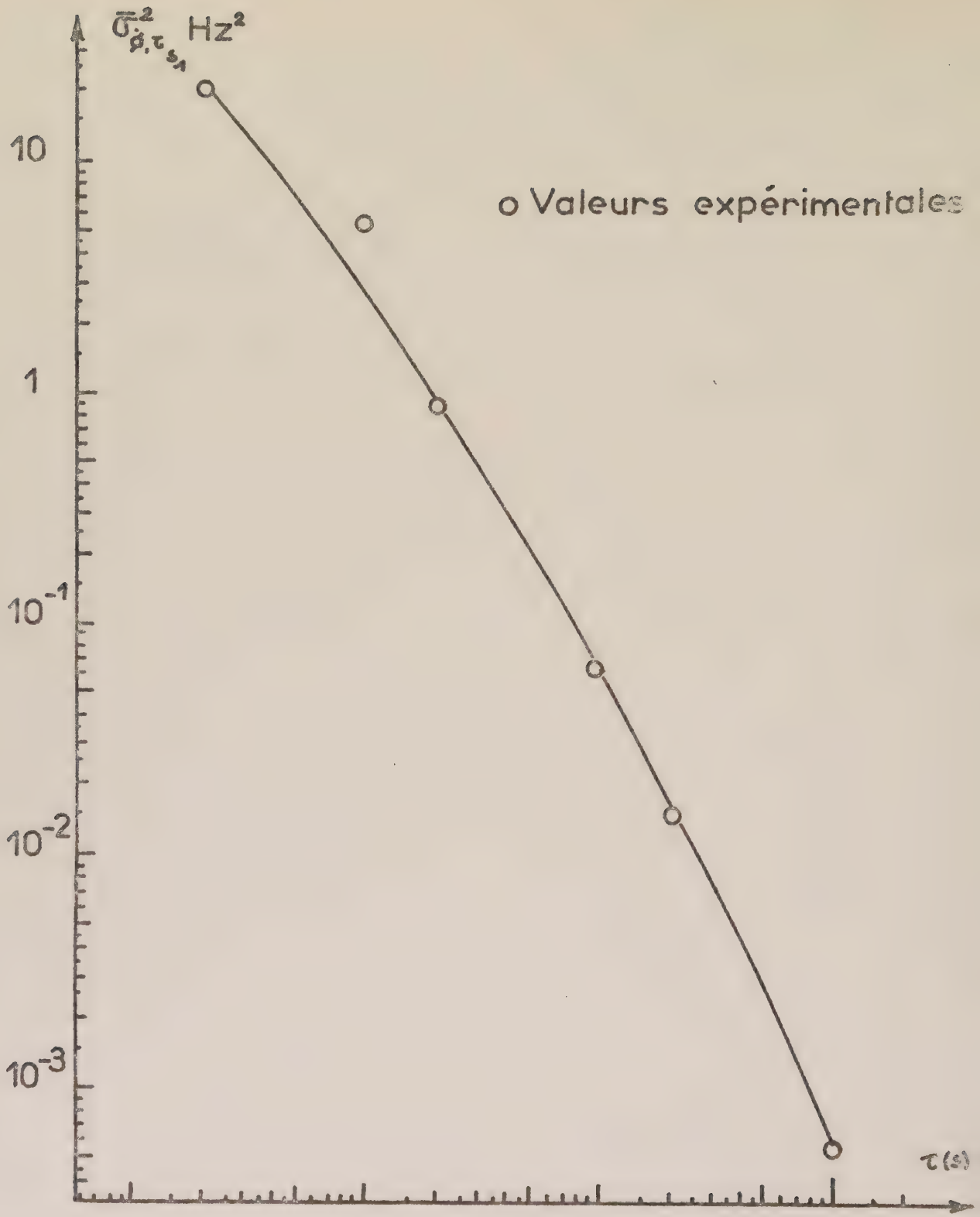


FIG 29 Carré moyen des fluctuations de fréquence dues à deux chaines de multiplication (quartz non éliminé)

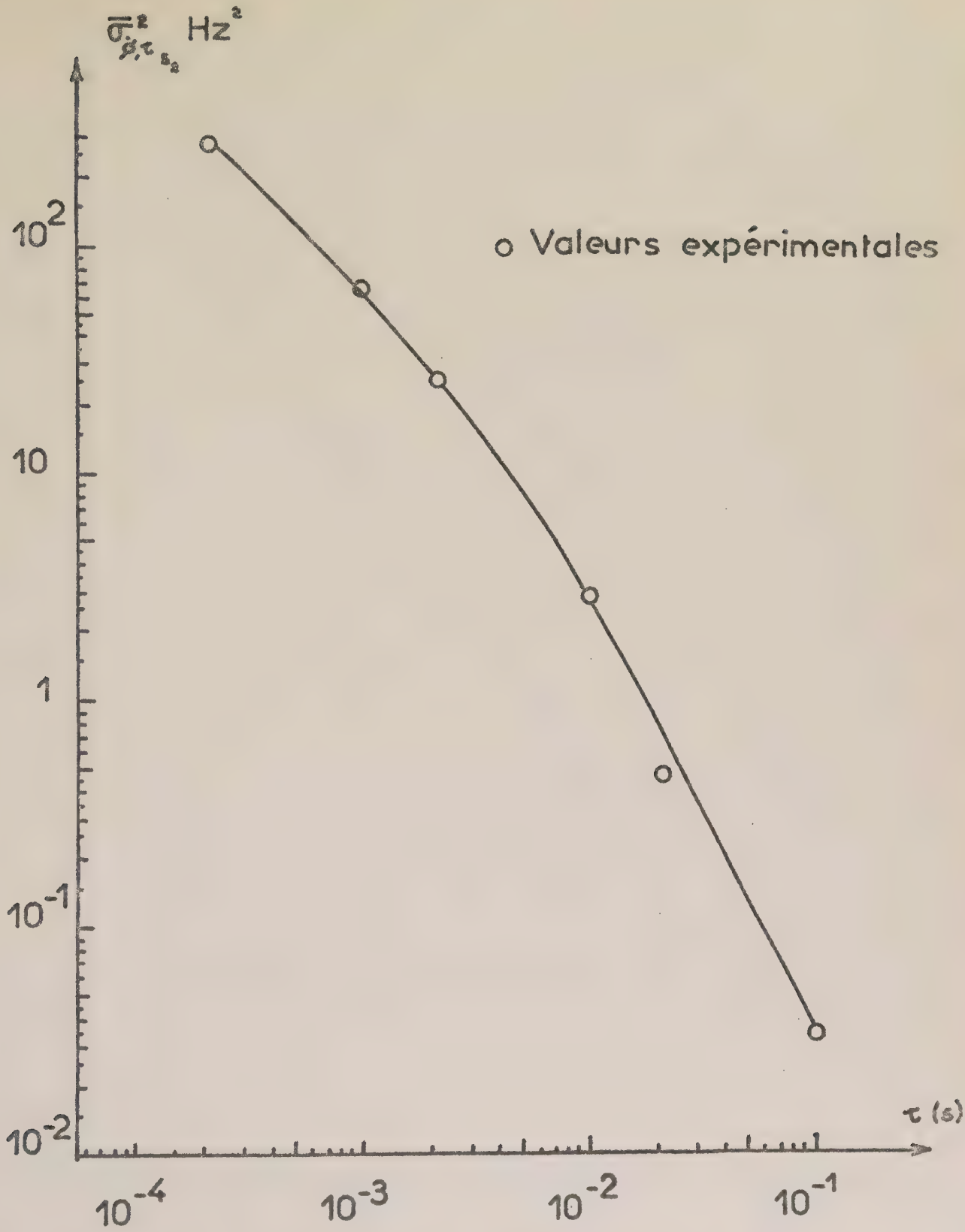


FIG 30 Carré moyen des fluctuations de fréquence du battement de deux quartz

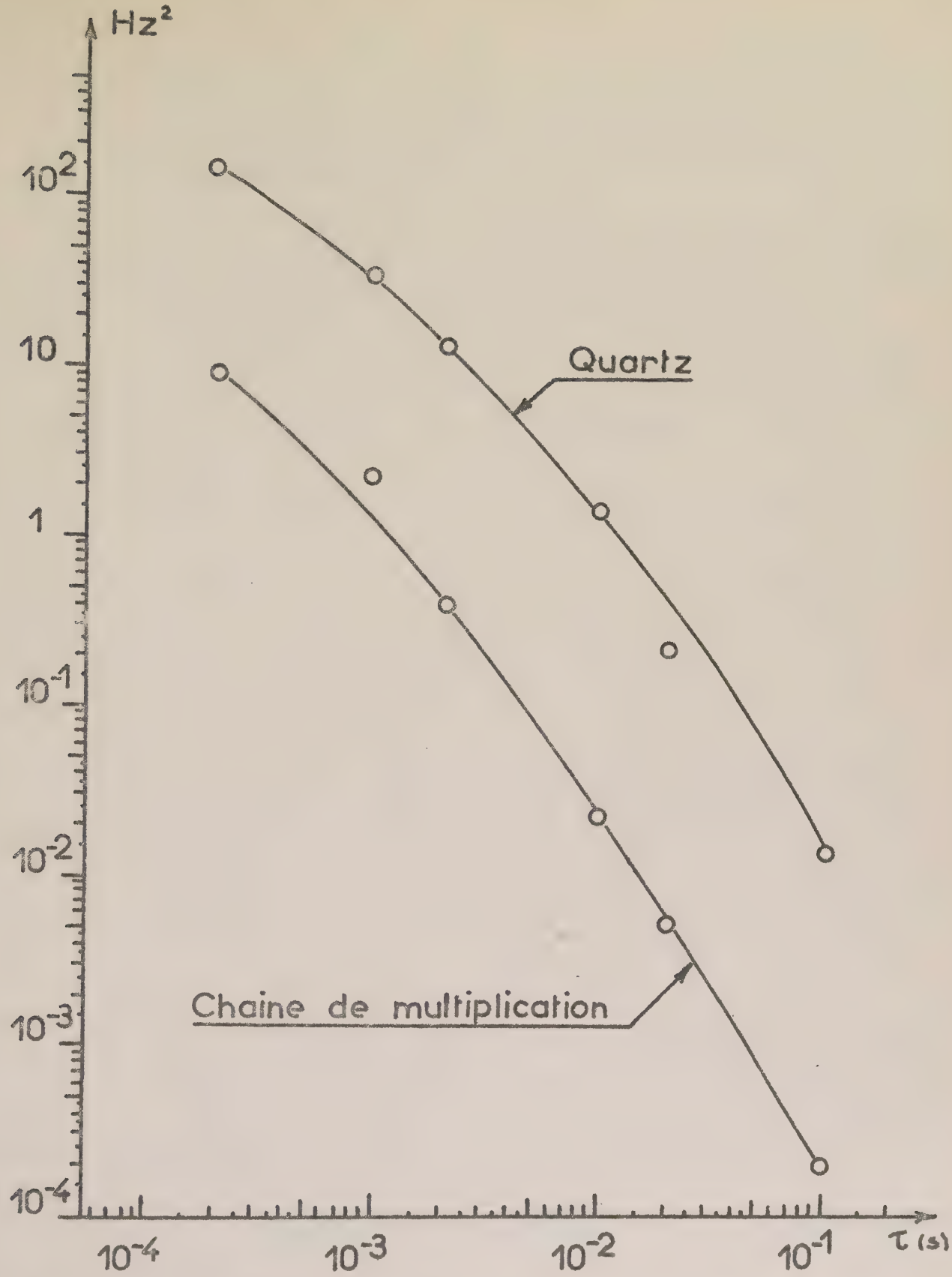


FIG 31 Carré moyen des fluctuations de fréquence

4) Mesure des fluctuations de fréquence par une méthode d'autocorrélation

Nous avons réalisé le montage de la Figure 32. Dans ce montage le signal de sortie du phasemètre hyperfréquence est envoyé sur un corrélateur qui effectuera le calcul :

$$C_{\phi}(\tau) = \overline{V(t) \cdot V(t+\tau)} \qquad \text{(III.24)}$$

V(t) étant la tension de sortie du phasemètre.

$$V(t) = K\left[\phi_1(t) - \phi_2(t)\right] = K\,\phi(t)$$

avec $\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$

Par suite

$$C_{\phi}(\tau) = K\,\overline{\phi(t)\quad\phi(t+\tau)}$$

L'enregistrement de la fonction d'autocorrélation de la phase est reproduit sur la Figure 33. Il est nécessaire d'étalonner cette courbe $C_{\phi}(\tau)$; nous avons procédé de la façon suivante :

a) Nous avons mesuré la valeur de τ pour laquelle la fonction d'autocorrélation $C_{\phi}(\tau)$ devient négligeable :

$$C_{\phi}(\tau) \simeq 0 \qquad \text{pour } \tau_1 = 0{,}1 \text{ s}$$

b) La valeur des fluctuations de fréquence étant connue pour une constante de temps τ de 0,1 seconde par la méthode de mesure précédente, nous pouvons en déduire $C_{\phi}(0)$ en utilisant la relation (III.14) :

$$C_{\phi}(0) = \frac{\tau_1^2}{2}\,\overline{\sigma}^2_{\dot{\phi}}(\tau_1) \qquad \text{(III.25)}$$

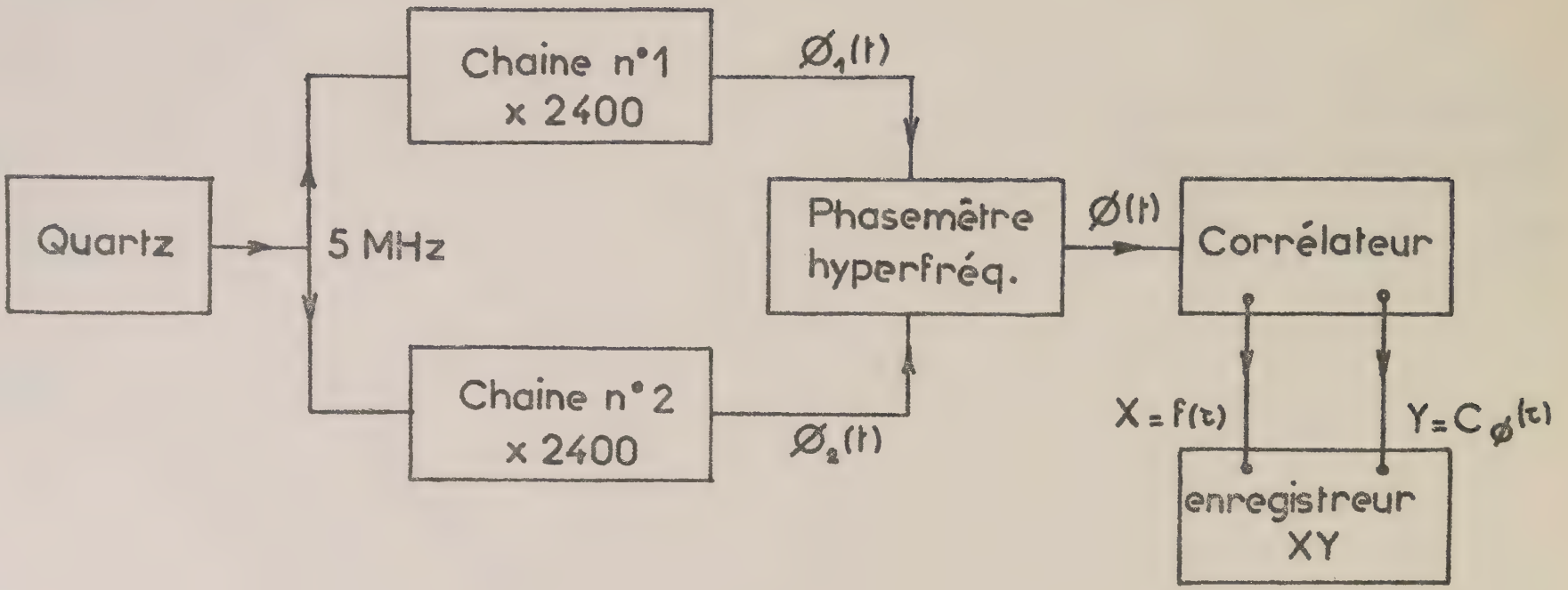


FIG 32 Montage permettant de tracer la fonction d'autocorrélation de la phase

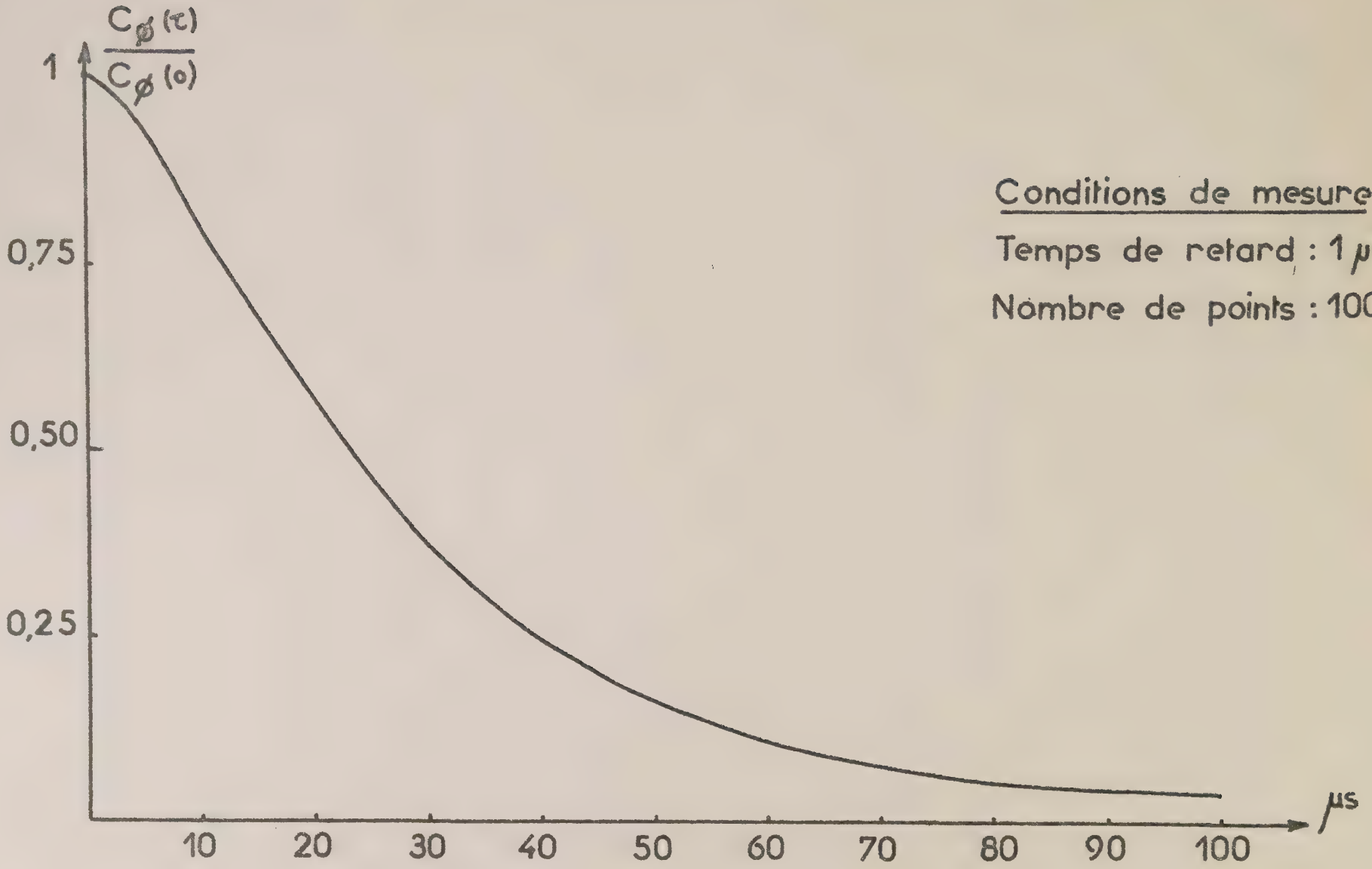


FIG 33 Fonction d'autocorrélation de la phase $C_f(\tau)$

Application numérique

$$\tau_1 = 0{,}1 \text{ s} \quad \bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau_1) = 2{,}2 \times 10^{-4} \text{rad}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$C_{\phi}(0) \simeq 10^{-6} \text{ rad}^2$$

D'où

$$\left[\bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau}\left(C_{\phi}(0) - C_{\phi}(\tau)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III.26)}$$

Les valeurs de $\left[\bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)\right]^{\frac{1}{2}}$ ainsi que celles de $\frac{\Delta F}{F}$ sont données dans le tableau suivant :

τ s	10^{-5}	2.10^{-5}	4.10^{-5}	10^{-4}	2.10^{-4}
$\left[\bar{\sigma}^2_{\phi}.(\tau)\right]^{\frac{1}{2}}$ Hz	61,6	46,3	30,6	13,2	7,1
$\Delta F / F$ 10^{-9}	5	4	2,5	1	0,6

Ces valeurs permettent de tracer la courbe pour de très faibles temps d'intégration $10^{-5} \leqslant \tau \leqslant 2 \times 10^{-4}$ (Fig. 34).

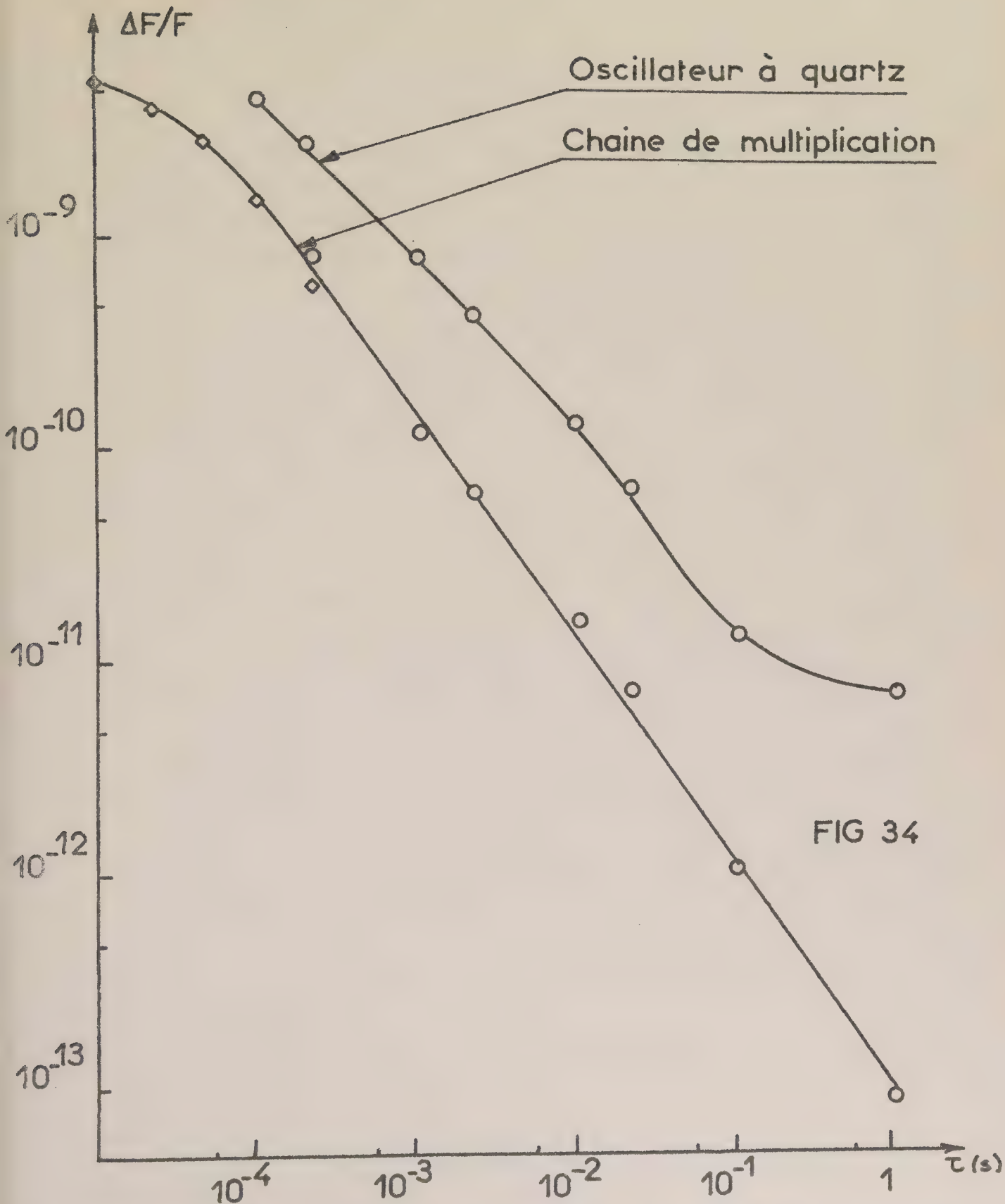


FIG 34

Evolution de ΔF/F en fonction du temps d'intégration

Il nous est possible d'utiliser notre appareil dans une expérience d'analyse spectrale, il suffit de piloter les chaînes de multiplication par deux quartz Q_1 et Q_2, à 5 MHz, légèrement décalés en fréquence, de façon à obtenir un signal de battement dans le domaine des hyperfréquences.

Le facteur de multiplication des chaînes égal à 2400, fait apparaître un signal de battement de l'ordre de 1 KHz lorsque l'écart entre les deux quartz est égal à 10^{-7}.. Ce battement est ensuite analysé au moyen d'un analyseur de spectre classique. Le spectre obtenu comportera les informations relatives à chacun des quartz. La connaissance du spectre de l'un d'eux, Q_1, par exemple, permet d'obtenir le spectre de Q_2. Le spectre de Q_1 peut être déterminé par une autre méthode utilisant le moyen puissant qu'est l'analyseur de spectre à maser à ammoniac [8].

Nous avons montré que la multiplication d'un signal de fréquence f par un nombre entier n a la particularité de multiplier l'indice de modulation des bandes latérales de ce signal par ce même nombre n. L'amplification des raies latérales produite par nos multiplicateurs, caractérisés par n = 2 400, est égale à 68 db (20 log 2 400).

Nous donnons, à titre d'exemple, quelques spectres obtenus par cette méthode (Fig. 35 - 36).

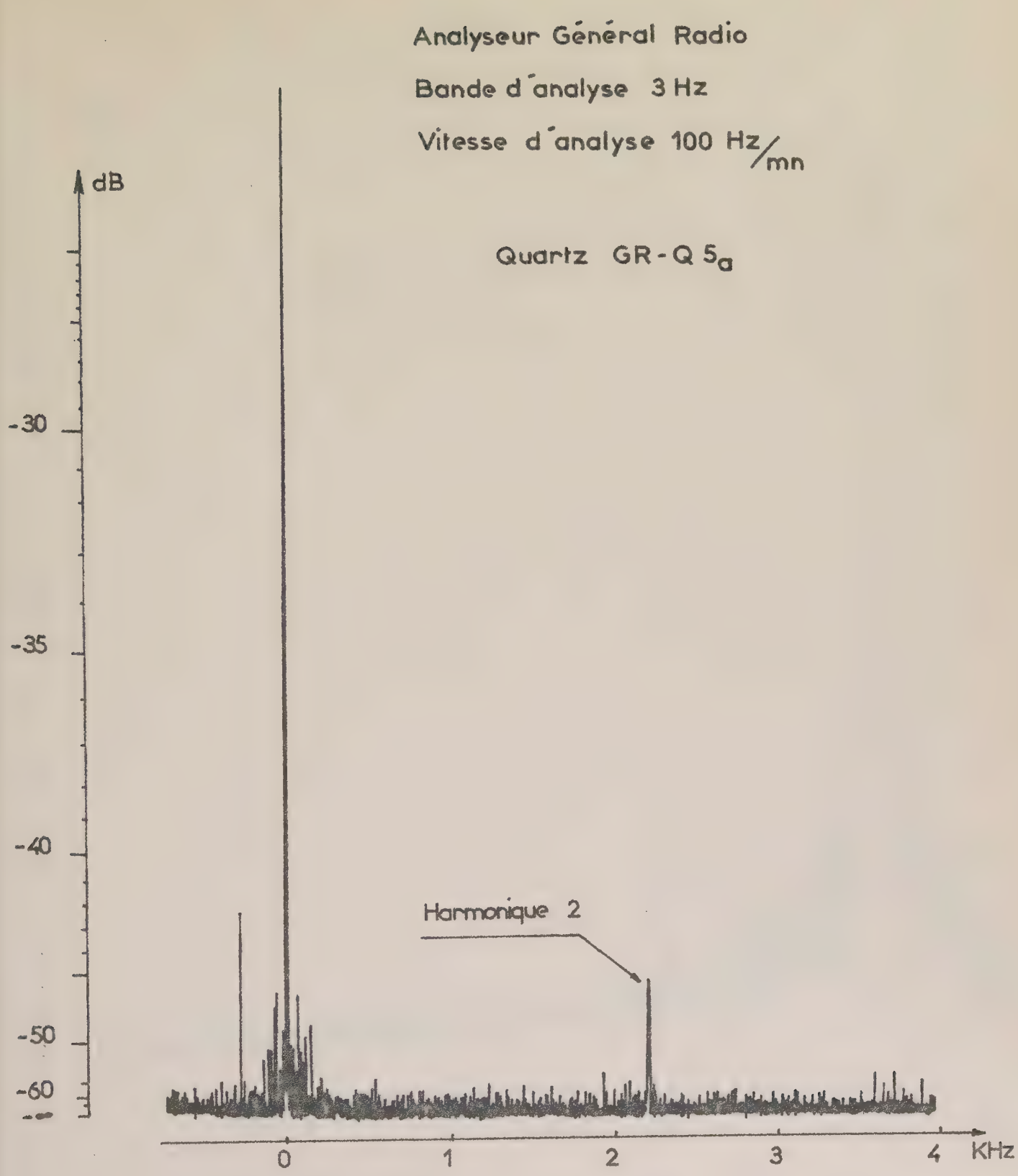


FIG 35 Spectre à 12 GHz du battement de deux quartz

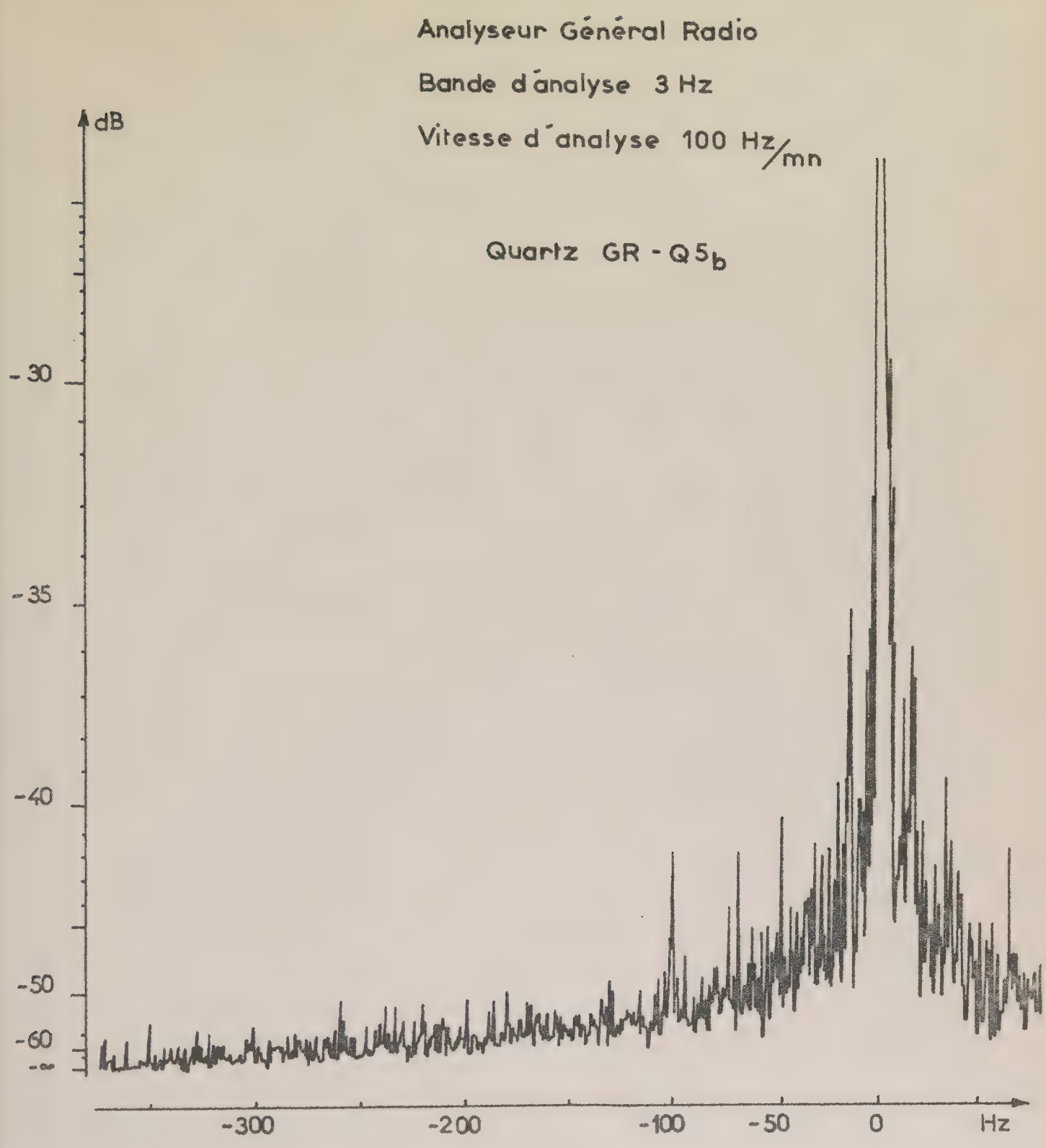


FIG 36 Spectre à 12 GHz du battement de deux quartz

C O N C L U S I O N

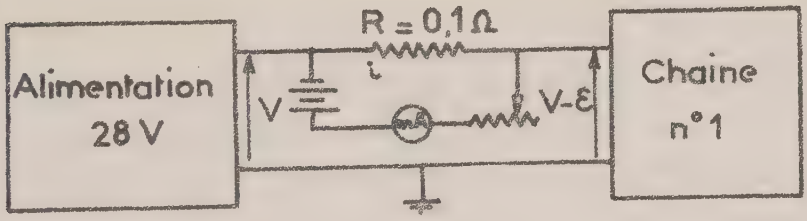
Nos expériences nous ont permis comme nous nous l'étions proposé, de mesurer le bruit propre introduit par les chaînes de multiplication de fréquence à état solide. Il nous a été possible de montrer que, dans un large domaine d'intervalles de temps de mesure, le bruit obéissait à la loi $\frac{\Delta F}{F} \simeq \frac{10^{-13}}{\tau}$. En même temps, nos expériences nous ont permis de mesurer le bruit des oscillateurs à quartz dans les mêmes domaines de temps d'intégration. Ce bruit est dans l'ensemble pour un même intervalle de temps de mesure, 10 fois supérieur à celui de nos chaînes. Ce résultat, qui correspond aux meilleurs performances des oscillateurs à quartz réalisés actuellement sur le plan international, montre que le bruit des quartz est encore prépondérant par rapport à celui introduit par les chaînes de multiplication. Mais si des progrès importants sur les oscillateurs à quartz devaient se produire, il faudrait améliorer les performances des chaînes de multiplication de fréquence. Nous pensons qu'il s'agit là d'un problème extrêmement difficile à traiter en l'absence d'une théorie bien élaborée du bruit de ces chaînes. Nous voudrions enfin souligner que nous disposons de moyens de mesures qui permettent de mesurer la stabilité d'un oscillateur sur des temps qui peuvent aller jusqu'à 10 microsecondes ce qui correspond à une durée de l'ordre de cinquante périodes. Il est évident que la stabilité sur des durées qui deviennent de l'ordre de la période pose des problèmes de mesure complètement nouveaux.

ANNEXE I

INFLUENCE DE LA TENSION D'ALIMENTATION

SUR LA STABILITE DE PHASE

On a étudié l'influence des fluctuations de la tension d'alimentation sur la stabilité de phase des chaînes de multiplication. La tension d'alimentation continue d'une des chaînes demeure fixe et on fait subir à la tension d'alimentation de la deuxième chaîne de multiplication une variation faible, connue, au moyen du montage ci-dessous :



La chute de tension dans R et par suite ΔV est obtenue aisément à partir de la valeur de i. On réalisera le montage de la figure 27. L'étalonnage se fera au moyen du déphaseur étalonné. La courbe expérimentale représentant les variations de

phase $\Delta\varphi$ en fonction de $\Delta V/V$ met en évidence le caractère linéaire de la fonction $\Delta\varphi = f\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = K_1 \frac{\Delta V}{V}$ (Fig 37).

Une étude identique a été faite en inversant les deux alimentations. Le facteur de proportionnalité K_2 relatif à la deuxième chaîne est du même ordre de grandeur que celui qui est associé à la première chaîne.

La stabilité de la tension d'alimentation a donc une grande importance qui découle de la valeur élevée de K. Les résultats obtenus peuvent s'expliquer de la façon suivante :

Une variation de la tension d'alimentation produit une variation du niveau de la puissance délivrée par les amplificateurs de puissance polarisés en classe C*. Le changement du niveau de puissance a pour effet de modifier le point de fonctionnement des varactors. Il s'en suit donc une variation de la capacité présentée par les varactors, ce qui produit un léger désaccord des circuits résonnants et par suite une variation de phase.

*
Remarque : Une polarisation en classe A diminuerait ces variations mais d'un autre côté pour obtenir une puissance de sortie équivalente à celle obtenue en classe C, la puissance dissipée au collecteur serait multipliée par 3 d'où échauffement des jonctions et dérives lentes produites.

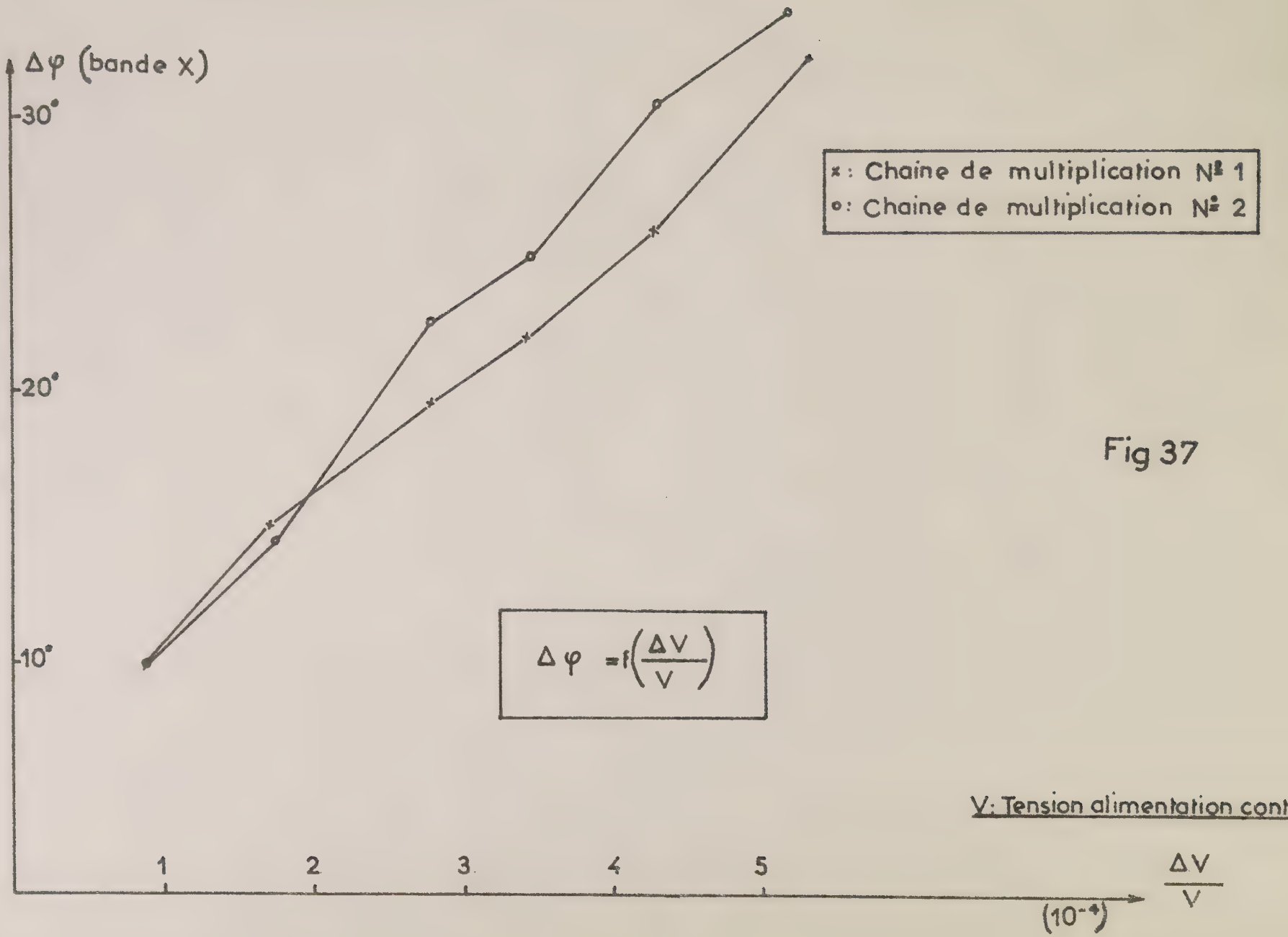
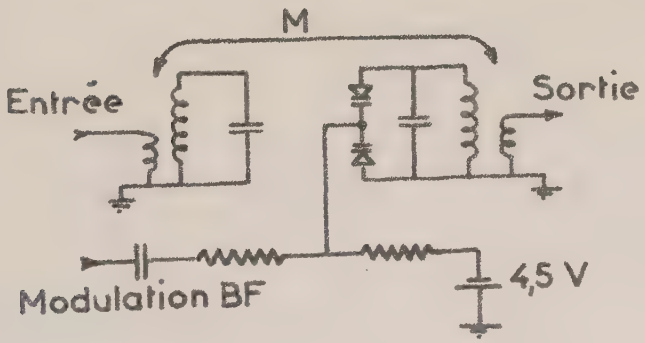

Δφ (bande X)
30°
20°
10°
×: Chaine de multiplication N° 1
o: Chaine de multiplication N° 2
Δφ = f(ΔV/V)
V: Tension alimentation continue
1
2
3
4
5
ΔV/V
(10⁻⁴)

Fig 37

ANNEXE 2

MODULATEUR DE PHASE

Le modulateur de phase est constitué de deux circuits couplés magnétiquement et résonnant à la fréquence f à moduler. On utilise dans le circuit de sortie deux varactors montés en tête-bêche. Ceux-ci présentent une capacité fonction de la tension appliquée à leurs bornes. Il en résulte une variation de phase du signal de sortie par rapport au signal d'entrée. Le modulateur de phase est représenté sur la figure ci-contre. La phase du signal aux bornes du secondaire par rapport à celle du primaire, pour un désaccord Δf faible est donné par la relation A.1 :



$$\Delta\phi = 2\,Q\,\frac{\Delta f}{f} \qquad (A.1)$$

Dans cette expression, f est la fréquence d'accord du circuit résonnant :

$$f = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{(LC)^{1/2}} \qquad \frac{\Delta f}{f} = -\,\frac{1}{2}\,\frac{\Delta C}{C} \qquad (A.2)$$

On en déduit : $\Delta\phi = -\,Q\,\frac{\Delta C}{C}$ (A.3)

On peut linéariser la courbe C = f(V) du varactor au voisinage du point de fonctionnement. Dans ces conditions :

$$\Delta C = \alpha \Delta V$$

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta V} = - \frac{Q \alpha}{C}$$

Ce modulateur étant utilisé dans la mesure du coefficient de rejection, on doit éviter de donner à l'excursion de phase $\Delta \Psi$ à la sortie du phasemètre hyperfréquence une valeur supérieure à π . Le calcul précédent permet d'obtenir la valeur maximum ΔV_m de la tension à appliquer au modulateur de phase :

$\Delta \Psi = n \Delta \phi$ n facteur de multiplication

$$\Delta \phi = - \frac{Q \alpha}{C} \Delta V < \frac{\pi}{n} \qquad |\Delta V| < \frac{\pi C}{nQ\alpha}$$

Application numérique :

Q = 78 C = 53 pF α = 0,25 pF/V n = 2400

$$(\Delta V)_{eff} < \frac{\pi C}{2\sqrt{2nQ\alpha}}$$

$$(\Delta V)_{eff} < 1,3 \text{ mV}$$

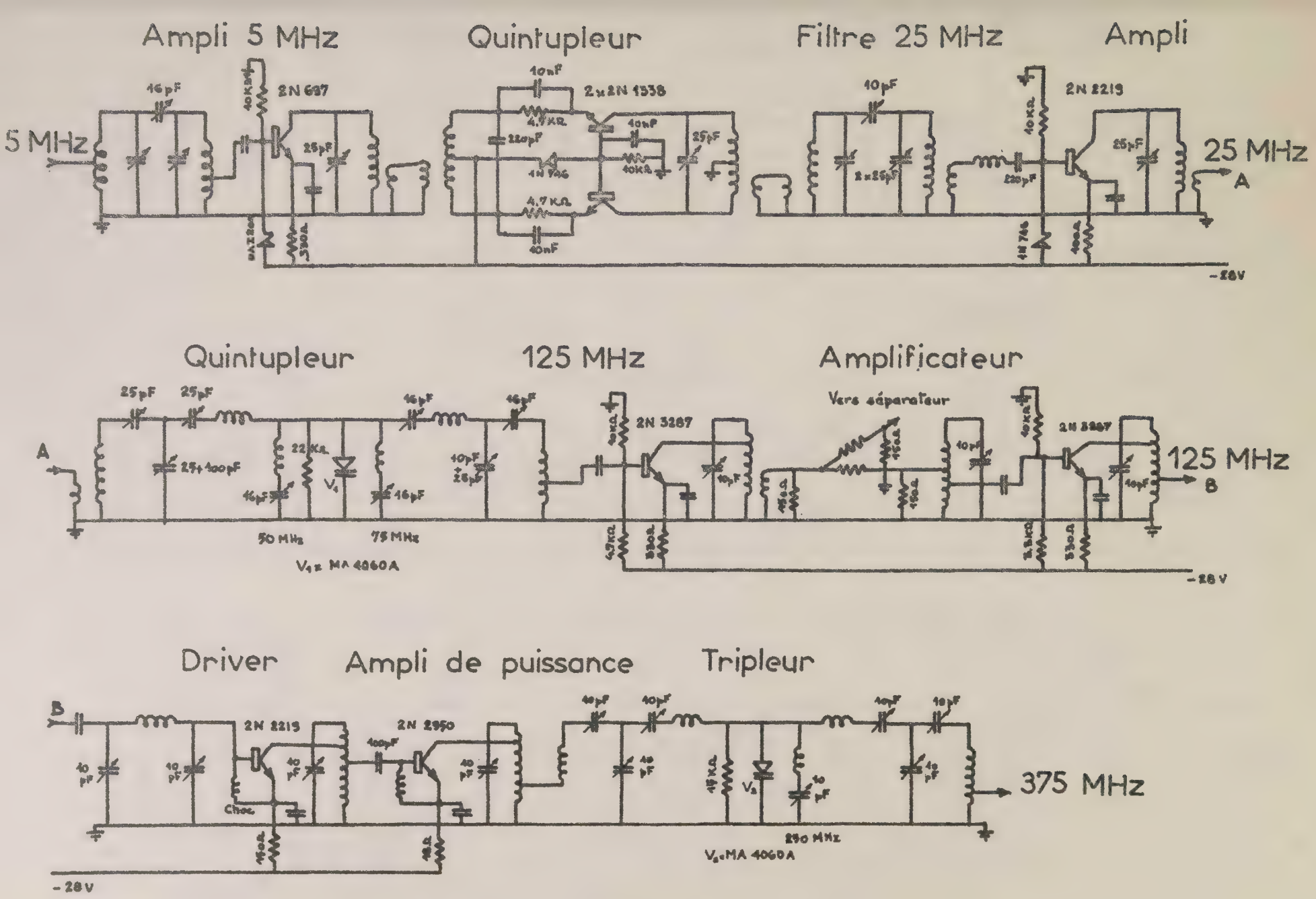


FIG 38 Multiplicateurs 5 - 375 MHz

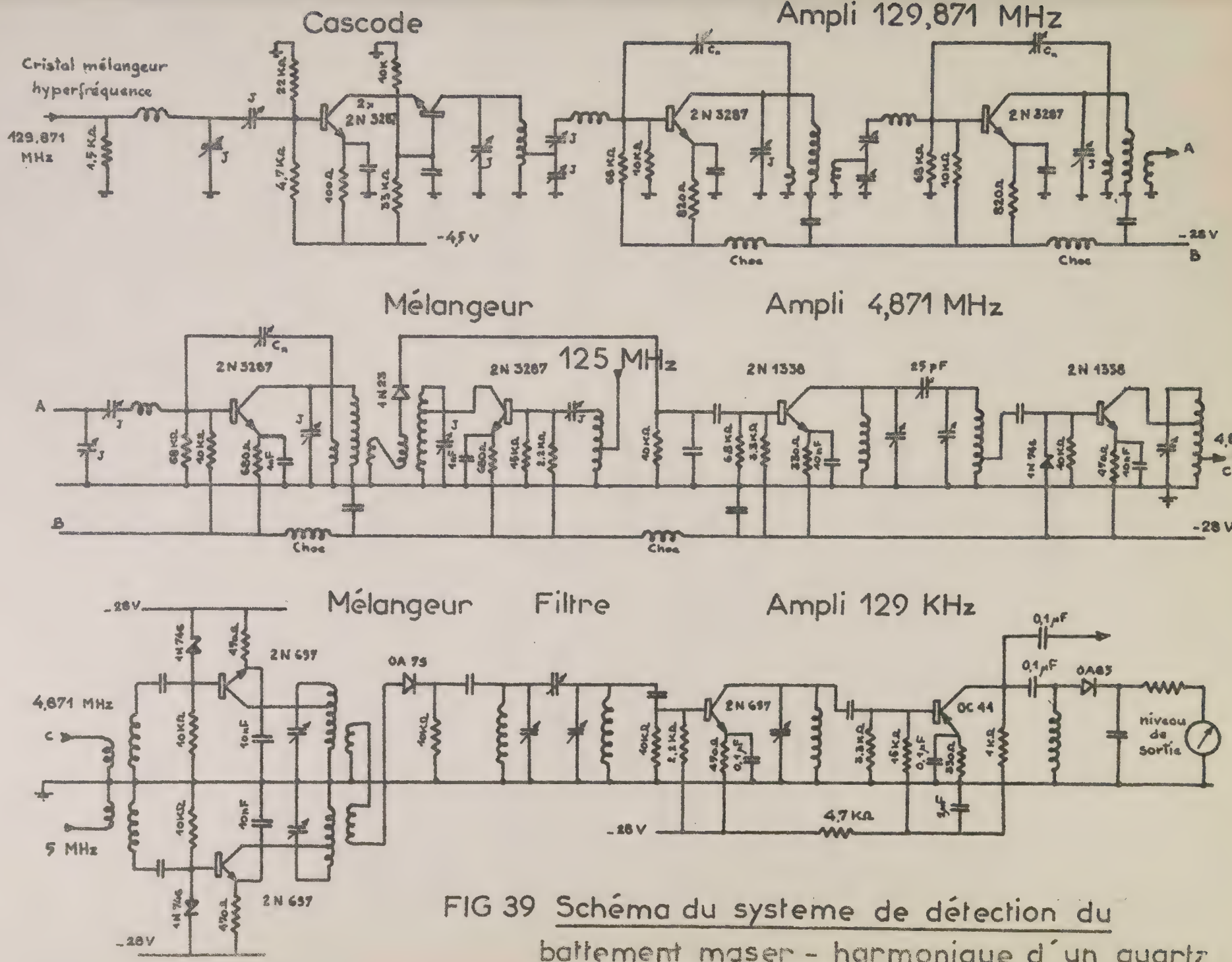


FIG 39 Schéma du systeme de détection du battement maser - harmonique d'un quartz

BIBLIOGRAPHIE

[1]	ALLAN D.	Statistics of atomic frequency standards - Proceedings of the IEEE vol. 54, n° 2 Février 1966
[2]	CUTLER et SEARLE	Some aspects of the theory and measurements of frequency fluctuations in frequency standards - Proceedings of the IEEE vol. 54, n°2 Février 1966
[3]	PAGE Ch.	Frequency conversion with non linear resistance- J. of Research of the National Bureau of Standard
[4]	ROZHANSKII	Static electromagnetic frequency changers - Perganon Press OXFORD 1963
[5]	PENFIEL-RAFUSE	Varactor applications M.I.T. Press 1962
[6]	GIACOLETTO L.J.	Junction capacitance and related characteristics using graded impurety semiconductors. - IRE Trans on Electron Devices ED 4 207-215 July 1967
[7]	MANLEY J.M. et ROWE H.E.	Some general proprieties of non linear elements - Part 1. General energy relations - Proceedings of the IEEE July 1956 p. 904
[8]	OLIVIER M.	Analyseur de spectre à maser Thèse de Doctorat 1964

N° d'ordre : 29

Original de la Thèse de J. GROSLAMBERT

Vu et approuvé

Besançon, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

M. THIEBAUT

Vu et permis d'imprimer

Besançon, le

Le Recteur,

M. PIRONNEAU